

Иончлолын бүрэн дифференциал огтлолыг координатын төлөөлөл дэх долгион функцээр шууд тодорхойлох

Г.Зоригт*, Ч.Алдармаа, Л.Хэнмэдэх

Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль, Физикийн тэнхим

Бид энэ ажлаар протон ба антипротон устөрөгчийн атомтай мөргөлдөх үеийн иончлолын бүрэн дифференциал огтлолыг координатын төлөөлөлд дэх долгион функцээр шууд илэрхийлэгдэг болохыг харуулахыг зорилоо. Сум ионы хувьд шагайлтын зайн төлөөлөлд тооцоолсон долгион функцүүдээс тодорхой өнцгөөр сарних үед харгалзах буюу шилжүүлсэн импульсийн төлөөлөлд долгион функцыг хувирган гаргав. Энэхүү долгион функцийг модулын квадратын дүрслэл нь иончлогдсон электроны өнцгийн түгэлт хугацааны хувьд хэрхэн хувьсаж байгааг харуулж байна. Дүрслэлээс иончлогдсон электроны урсгал шууд ажиглагдаж байна. Мөн долгион функцээр иончлолын бүрэн дифференциал огтлолыг шууд тодорхойлсон нь уламжлалт арга болох иончлолын амплитудаар тодорхойлсон үр дүнтэй хугацаанаас хамааран нийлж байгааг үзүүлээ.

PACS numbers: Gs67.63.Gh, 67.80.Fh, 67.25.dt, 42.60.Rn, 31.55.ee.

ОРШИЛ

Цэнэгт бөөм атомын мөргөлдөөний үр дүнд туршлагаар хэмжигдэх гол хэмжигдэхүүний нэг нь иончлолын дифференциал огтлол(БДО) юм.

Протон-Устөрөгч, антипротон-Устөрөгчийн атомын мөргөлдөөний БДО-г хөндөх онолоор тооцоолсоныг Jones ба Madison [1], Voitkiv ба Ulrich [2] гэх мэт өгүүллээс харж болно.

Сүүлийн үед хөндөх бус онолын тооцооллуудыг олон судлаачид хөгжүүлж ирсэн байна [3-10].

Зарим инерт хийн болон хүнд атомууд, молекулыг цэнэгт бөөм болон лазераар үйлчлэх үед иончлолын дифференциал огтлолыг хэмжсэн туршлагауд байгаа ч энэхүү ажлын хүрээнд авч үзэж байгаа устөрөгчийн атомыг протон ба антипротоноор иончлох үзэгдлийн хувьд БДО-г хэмжсэн туршилт одоогоор хийгдээгүй байна.

Бид шагайлтын зайн төлөөлөлд устөрөгчийн атомын электроны долгион функцыг хугацаанаас хамаарсан Шредингерийн тэгшитгэл(ХХШТ)-ийг Кулоны долгион функцийг дискрет хувьсагчийн төлөөлөлд (CWDVR) [11-12] тооцооллоо [13].

Тодорхой шагайлтын утганд долгион функцийг утгаар электроны магадлалын нягтын түгэлтийг хугацаанаас хамааруулан [16-19] ажлуудад харуулжээ. Бид долгион функцийг шагайлтын зайн төлөөллөөс шилжүүлсэн импульсийн төлөөлөлд Фурье хувиргалтаар хувирган

тодорхой сарнилд харгалзах электроны магадлалын нягтын түгэлтийг гарган авлаа.

Шилжүүлсэн импульсийн төлөөлөл дэх долгион функцээр иончлолын БДО-г шууд тодорхойлох боломжтой болохыг батлан харуулахыг зорилоо. Өгүүлэгийн туршид атомын нэгжийн системийг ашигласан болно.

ОНОЛ

Электроны долгион функцыг шилжүүлсэн импульсийн төлөөлөлд хувиргах

Цэнэгт бөөм (сум) устөрөгчийн атомыг мөргөх үзэгдлийг хугацаанаас хамаарсан Шредингерийн тэгшитгэлээр судалъя. ХХШТ нь

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = [\hat{H}_0 + \hat{V}(\vec{r}, t)]\Psi(\vec{r}, t) \quad (1)$$

гэж бичигдэнэ.

Энд \hat{H}_0 - устөрөгчийн атомын гамилтониан, $\hat{V}(\vec{r}, t)$ - сум электроны харилцан үйлчлэлийн потенциал бөгөөд шагайлтын зайн төлөөлөлд дараах байдлаар бичнэ.

$$\hat{V}(\vec{r}, t) = \frac{-Z_p}{|\vec{R}(b, 0, vt) - \vec{r}|} \quad (2)$$

Энд t -хугацаа, b шагайлтын зай, v -тусч буй сумны хурд, $\vec{R} = \vec{v}t + \vec{b}$.

Зураг 1-д мөргөлдөөний кинематик схем болон параметруудыг дүрслэн харуулав. b - шагайлтын зайд харгалзах долгион функцыг $\Psi_{\vec{b}}(t, \vec{r})$ гэж тэмдэглэе.

* Electronic address: zorigt@must.edu.mn

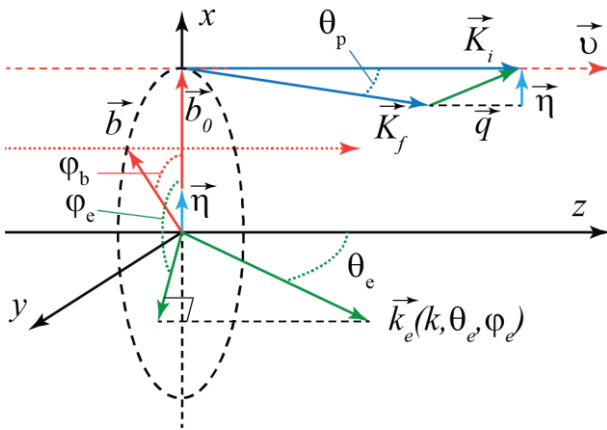
Шагайлтын зайн төлөөлөлд бодож олсон долгион функцүүдийг ашиглан сум ионы хувьд тодорхой сарнилын өнцөг буюу перпендикуляр шилжүүлсэн импульс $\vec{\eta}$ –д харгалзах долгион функцыг хоёр хэмжээст Фурье хувиргалтаар гарган авья (3).

$$\Psi_{\vec{\eta}}(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{b} e^{i\vec{\eta}\vec{b}} e^{i\delta(b)} \Psi_{\vec{b}}(t, \vec{r}) \quad (3)$$

энд $\delta(b)$ нь сум ба устөрөгчийн атомын цөмийн хаилцан үйлчлэлийг тооцсон фаз [10].

$$\delta(b) = \frac{2Z_a Z_p}{v} \cdot \ln(v \cdot b). \quad (4)$$

$Z_a = 1$ ба $Z_p = 1$ атомын цөм ба сумны цэнэг. (3)-д долгион функц нь сумны хувьд шилжүүлсэн импульсийн перпендикуляр байгуулагчийн нэг утганд харгалзах электроны хувьд координатын төлөөлөлд тодорхойлогдсон байна.



Зураг. 1. Сум ион ба устөрөгчийн атомын мөргөлдөөний схем. Сум z тэнхлэгийн дагуу шулуунаар хөдлөнө. \vec{K}_i , \vec{K}_f – сум ионы анхны ба эцсийн импульс, \vec{k}_e – электроны импульс, $\vec{\eta}$ – сумнаас атомд шилжүүлсэн импульс \vec{q} –гийн сумны хурд \vec{v} -д перпендикуляр байгуулагч.

БДО–г шилжүүлсэн импульсийн төлөөлөл дэх долгион функц (3)-аар шууд тодорхойлох боломжийг авч үзье. Электроны магадлалын нягт нь

$$\frac{d^3 P(\vec{\eta})}{dv d\vec{\eta}} = |\Psi_{\vec{\eta}}(t, \vec{r})|^2 \quad (5)$$

Энд эзлэхүүний дифференциалыг бөмбөлөг координатын системд бичиж, ε энергийг r –ээс хамаарсан функц гэж үзээд хувьсагч шилжүүлэн дифференциал магадлалыг дараах байдлаар бичье.

$$\frac{d^3 P(\vec{\eta})}{d\varepsilon d\Omega_e d\vec{\eta}} = \frac{|\Psi_{\vec{\eta}}(t, \vec{r})|^2 r^2 dr}{d\varepsilon} \cdot (t \rightarrow \infty) \quad (6)$$

Энд ε - нь эжекцийн энерги. Релятив координатын системд [5] сарнилын өнцөг бага үед $d\vec{\eta}$ –аас сарнилын биет өнцгийн дифференциал $d\Omega_p$ –д шилжихэд $K_i K_f$ үржигдэхүүн гарах ба тусч буй сум нэгж урсгалын нягттай гэвэл БДО дараах хэлбэрээр бичигдэнэ.

$$\frac{d^3 \sigma}{d\varepsilon d\Omega_e d\Omega_p} = K_i K_f \frac{|\Psi_{\vec{\eta}}(t, \vec{r})|^2 r^2}{d\varepsilon/dr} \cdot (t \rightarrow \infty) \quad (7)$$

Энд $K_i K_f$

Үүнийг долгион функцээр тодорхойлсон БДО (ДФТ-БДО) гэе. Одоо эжекцийн энерги ε ба координатын хамаарлыг тодорхойлохын тулд долгион функцээ дараах хэлбэрээр бичье.

$$|\Psi_{\vec{\eta}}(t, \vec{r})| = a, \arg(\Psi_{\vec{\eta}}(t, \vec{r})) = S \Rightarrow \Psi = a e^{iS} \quad (8)$$

Энд долгион функцын фаз нь S ба модуль нь a болно.

Үүнийг Шредингерийн тэгшитгэлд орлуулан дараах квант Гамильтон-Якобын тэгшитгэлийг гаргаж болно. [15]

$$-\frac{\partial}{\partial t} S(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\nabla S(\vec{r}, t))^2 + U - \frac{1}{2a} \Delta a \quad (9)$$

Тэгшитгэлийн баруун талд $\nabla S(\vec{r}, t)$ нь бөөмийн импульс тул $\frac{1}{2} (\nabla S(\vec{r}, t))^2$ нь кинетик энерги, орны потенциал энерги- U , $-\frac{1}{2a} \Delta a$ Бомын потенциал энергүүд болох учир нийлбэр нь бүрэн энерги болно. Иймд хугацааны эгшин бүрд дурын цэг дээр электронд харгалзах бүрэн энерги дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} S(\vec{r}, t) \quad (10)$$

(10) илэрхийллээс ε эжекцийн энергид харгалзах координат ба энергийн радиал уламжлалыг олж (7)-д орлуулснаар БДО-г тодорхойлогдоно.

БДО-г квант механикийн уламжлалт арга болох амплитудаар тодорхойлогдсон БДО (АТ-БДО) дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ [10].

$$\frac{d^3 \sigma}{d\varepsilon d\Omega_e d\Omega_p} = K_i K_f |T(\varepsilon, \theta_e, \varphi_e, \eta, \varphi_\eta)|^2 \quad (11)$$

Энд иончлолын амплитуд нь

$$T(\varepsilon, \theta_e, \varphi_e, \eta, \varphi_\eta) = \langle \Psi_{\vec{k}}^{(-)} | \Psi_{\vec{\eta}}(t, \vec{r}) \rangle \cdot (t \rightarrow \infty) \quad (12)$$

Энэхүү амплитуд бусад судлаачдын бичсэн (жишээ нь [10]) шагайлтын зайн төлөөлөлд иончлолын амплитудыг тодорхойлоод Фурье хувиргалтаар шилжүүлсэн импульсийн төлөөлөлд хувиргасантай (12) илэрхийлэл адилхан болно. Үүнийг $\Psi_k^{(-)}$ дээр проекцлох ба Фурье хувиргалтын интегралуудын дарааллыг сэлгэхэд аналитикаар батлагдана.

ДФТ-БДО-н (7) илэрхийлэл нь уламжлалт арга болох АТ-БДО-н (11) илэрхийлэлтэй харьцуулахад хугацаанаас хамаарсан долгион функцын тухайн координат дээрх утгаар илэрхийлэгдэх локал шинж чанартай байна.

ТООЦООЛЛЫН ҮР ДҮН

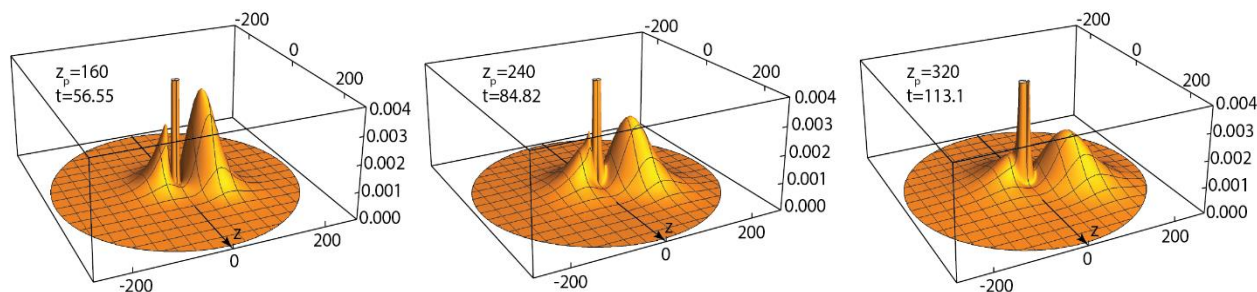
Тусч буй антипротон ба протоны энерги 200 кэВ үед ХХШТ-г CWDVR тооцооллыг хийсэн ба энэхүү аргад сум электроны харилцан үйлчлэлийг шагайлтын зайн төлөөлөлд хугацаанаас хамаарсан орон хэлбэрээр авч электроны долгион функцыг бөмбөлөг координатын системд сфер гармоник функцээр задлан радиал функцийг хугацаанаас хамааруулан тооцоолов. Радиал координатыг Кулоны долгион функцын язгууруудаар дискретчилэн устөрөгчийн атомын псевдо спектрал баазуудыг байгуулж тооцооллыг хийлээ. Тооцоололд параметруудийг дараах байдлаар авлаа. Антипротоны хувьд Кулоны долгион функцын цэнэг тоо $Z=120$, долгион тоо $k=8$, радиал торын зангилаа $N=1200$ байхад $r_{max}=457.8$ байлаа. Орбитын моменты хамгийн их утгыг 8-аар авч шагайлтын зайг $b_{max}=30.8$, сум

ионы анхны байрлал -80 -аас $z=1000$ хүртэл $\Delta z = 0.08$ алхамтайгаар шилжүүлэн тооцооллыг хийв. Харин протоны хувьд параметруудын утгыг $Z=120$, $k=4$, $N=800$, $r_{max}=583.1$, $b_{max}=37.5$, $z=560$, $\Delta z = 0.16$ байхаар авлаа.

Протон болон антипротон устөрөгчийн атомтай мөргөлдөх процессыг судалсан онолын ажлуудад тодорхой шагайлтын утгуудад долгион функцийг хувьсалыг түүний модулын квадратаар дүрслэсэн байна [16-19]. Энэ нь мөргөлдөөний процессийн хувьсалыг илэрхийлж байгаа хэдий ч туршлагаар хэмжигдэх боломжгүй юм. Учир нь одоогоор тодорхой шагайлтын зайд харгалзах туршлагыг тавих, хэмжилт хийх боломж бүрдээгүй байна.

Бид туршлагаар хэмжигдэх боломжтой үр дүнг харуулахын тулд шилжүүлсэн импульсийн төлөөлөлд долгион функцыг (3) томъёогоор тодорхойллоо. Энэхүү долгион функц нь туршлагаар хэмжигдэх боломжтой хэмжигдэхүүнийг илэрхийлэхийн зэрэгцээ мөргөлдөөний хувьсалыг харах боломж олгож байна (зураг 2, 3). Зураг 2, 3 –д протон ба антипротоны сарнилын өнцөг 0.2 мрад буюу шилжүүлсэн импульсийн перпендикуляр байгуулагч $\eta = 0.519$ үед долгион функцын модулын квадратыг $(|r \Psi_{\vec{\eta}}(t, \vec{r})|^2)$ сарнилын хавтгай дээр антипротоны z координат 160, 240, 320 ба протоны z координат 240, 320, 400 байх хугацааны өөр өөр эгшинд дүрслэв.

Зурагт 2 –т иончлогдсон электроны урсгал гадагш тарж байгаа нь пикийн шилжилтээс харагдаж байна.

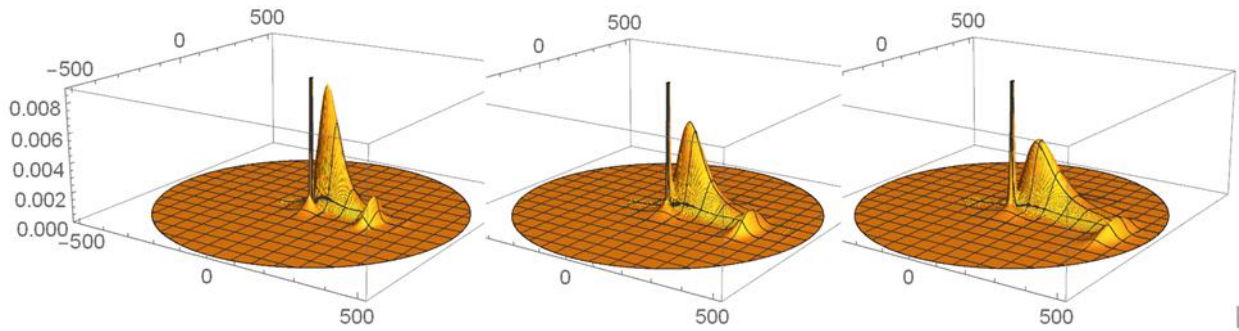


Зураг 2. антипротоны z координат Z_p ба хугацаа t , сарнилын хавтгай дээрх электроны магадлалын нягт.

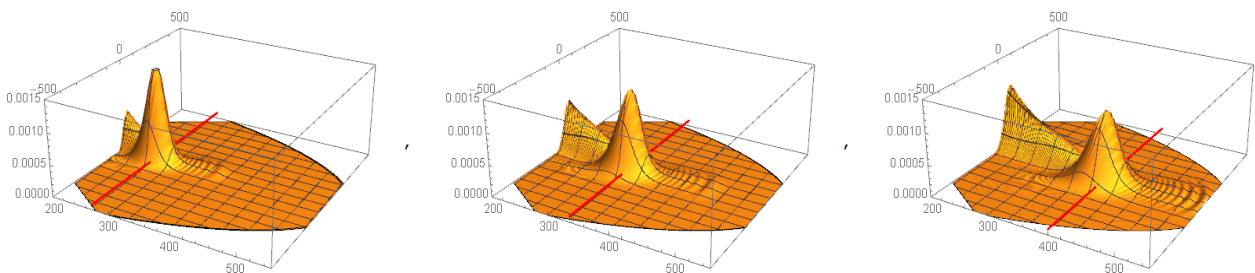
Протоны мөргөлтөөр өдөөлт, иончлолын зэрэгцээ цэнэг шүүрэх үзэгдэл явагддаг. Зураг 3-д цэнэг шүүрэгдэн протоныг даган шилжиж байгаа нь z тэнхлэгийн дагуу шилжих бага

пикээс харагдаж байна. Үүнийг нягтлахын тулд бага пикийн протоны z координат 272, 336, 400 байх хугацааны эгшин бүрт протоны байрлалтай харьцуулан зураг 4-д үзүүлэв. Зурагт

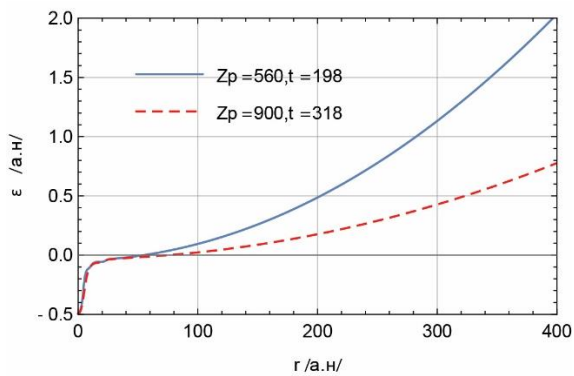
үзүүлсэнээр бага пикийн оройн байрлал электрон протонтой хамт хөдөлж байгааг протоны байрлалтай тохирч байгаа нь энэ хэсэгт харуулж байна.



Зураг 3. Протоны z координат 240,320,400 байх үед харгалзах сарнилын хавтгай дээрх электроны магадлалын нягт.



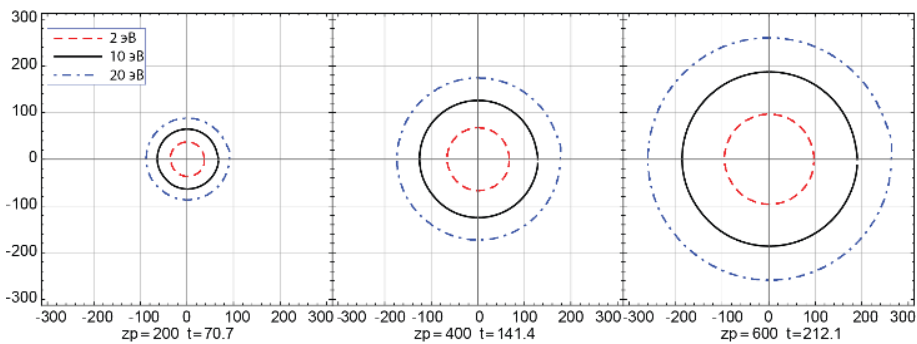
Зураг 4. Протоны z координат 272,336,400 (улаан шугамаар дүрслэв) байх хугацааны эгшинд харгалзах сарнилын хавтгай дээрх электроны магадлалын нягт.



Зураг 5. Координат энергийн хамаарал. Сарнилын хавтгай дээр антипротоны хурданд перпендикуляр чиглэлд.

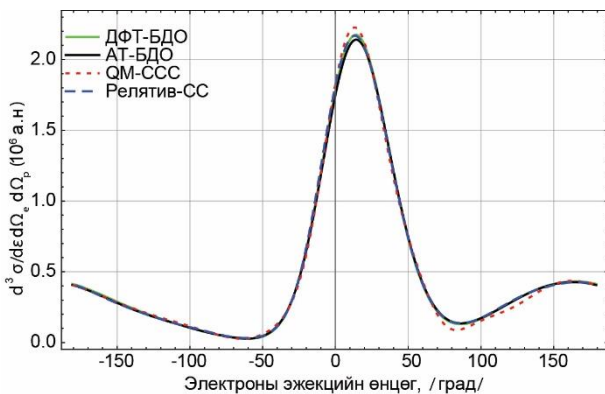
ХХШТ-ийн тоон шийдээс энерги координатын хамаарлыг (10) томъёогоор тодорхойлоё.

Зураг 5-д сарнилын хавтгай дээр z тэнхлэгтэ перпендикуляр чиглэл дэх энерги координатын хамаарлыг үзүүлэв. Координатаас хамаарч энерги өсч байгаа нь энерги ихтэй электронууд атомын төвөөс түрүүлж холдож байгааг харуулж байна. Мөн хугацаа нэмэгдэхэд ижил энергэд харгалзах координат ихсэж буй нь электрон гадагш шилжиж байгааг харуулна.



Зураг 6. Сарнилын хавтгай дээрх ижил энергит гадаргын хугацааны хувьсал. Энд t хугацаа, z_p антипротоны z координат.

Зураг 6-д үзүүлснээр ижил энергит гадарга нь бараг бөмбөлөг хэлбэртэйгээр радиал чиглэлд тархаж байна. Ижил энергит гадаргын бөмбөлөг гадаргаас хазайх хазайлт 3% иас ихгүй байна. Энерги координатын хамаарлыг бүх чиглэлд хугацааны эгшин бүрд олж тодорхой энергид харгалзах гадарга дээрх долгион функээр БДО-г тооцооллоо. Зураг 7-д үзүүлснээр бидний ХХШТ-ийг тоон аргаар бодсон үр дүнгээр тодорхойлсон БДО релятив аргаар тооцоолсон [10], квант механик аргаар тооцоолсон [7] үр дүнгүүдтэй давхцаж байгааг харууллаа.

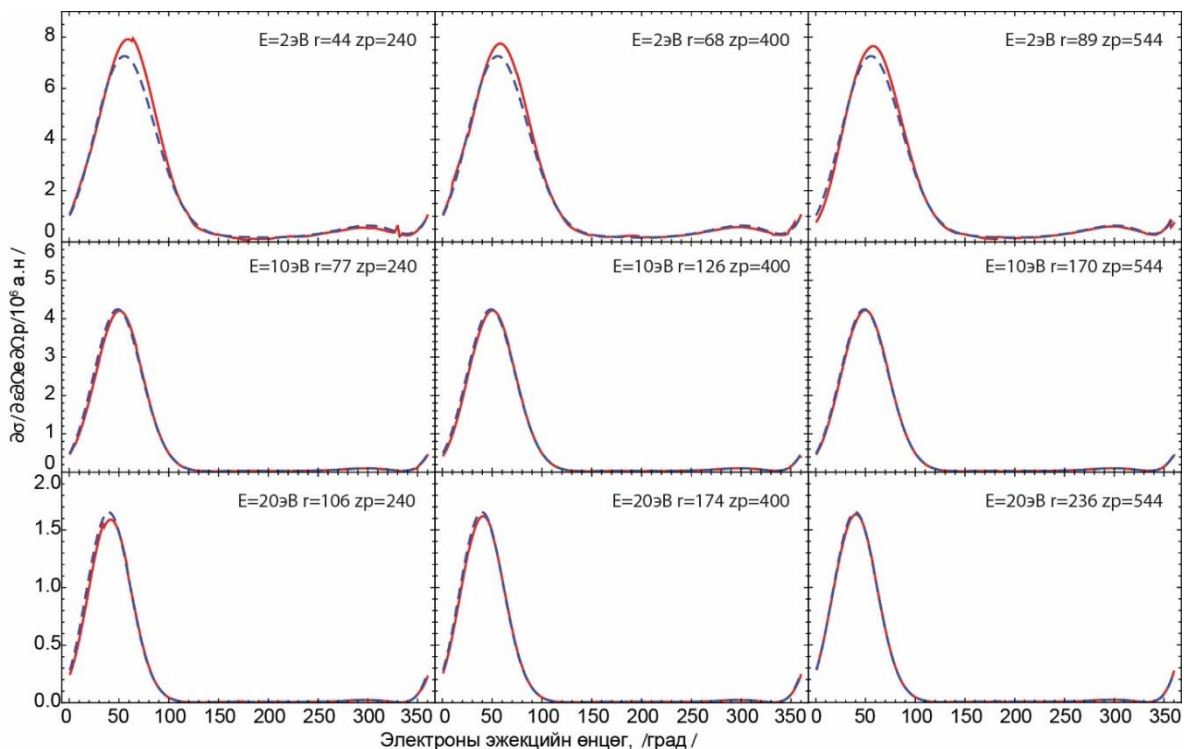


Зураг 7. 200кэВ энергитэй антипротон 0.2мрад өнцгөөр сарних үед электрон 7эВ энергитэй иончлогдох БДО-г сарнилын хавтгай дээр дүрслэв. Энд хэвтээ тэнхлэг θ_e өнцөг. Ногоон шугам - ДФТ БДО, хар шугам - АТ БДО, цэгүүд-СС[10], тасархай шугам- QM-CCC [7].

Мөн урьд нь өөр энергийн тохиолдлуудад CWDVR аргаар тооцоолсон үр дүнгүүдийг бусад онолын тооцоотой нийлж байгааг харуулсан билээ[13]. Иймд ХХШТ-ийг CWDVR аргаар бодсон үр дүнгийн ДФТ-БДО -г уламжлалт арга болох АТ-БДО-той харьцуулан авч үзье.

Протон-устөрөгчийн атомын мөргөлдөөний хувьд (3) долгион функээр БДО-г (7) томъёогоор олж уламжлалт арга болох (11) томъёогоор бодсонтой харьцуулан зураг 8 –д үзүүлэв.

Зураг 8-д протоны сарнилын өнцөг 0.2мрад буюу шилжүүлсэн импульсийн перпендикуляр байгуулагч $\eta = 0.519$ үед БДО-г сарнилын хавтгай дээр протоны z координат 240, 400, 544 байх хугацааны гурван өөр эгшинд дүрслэв. Зурагт үзүүлсэн БДО-н битүү шугам нь ДФТ-БДО, тасархай шугам нь АТ-БДО болно. Эдгээр үр дүнгүүдийн нийлэлтийг БДО-ын хамгийн их утгын харьцангуй зөрүүг үнэлж үзвэл протоны байрлал 240 –өөс 544 болоход эжекцийн энерги 2эВ үед 3.9%-оос 2.4%, эжекцийн энерги 10эВ үед 0.9%-оос 0.6%, эжекцийн энерги 20эВ үед 2.8%-оос 0.8% хүртэл буурч байна. Энэ нь иончлогдсон электрон атомын цөмөөс холдох тусам ДФТ-БДО нь АТ-БДО –той тохирохыг харуулж байна.

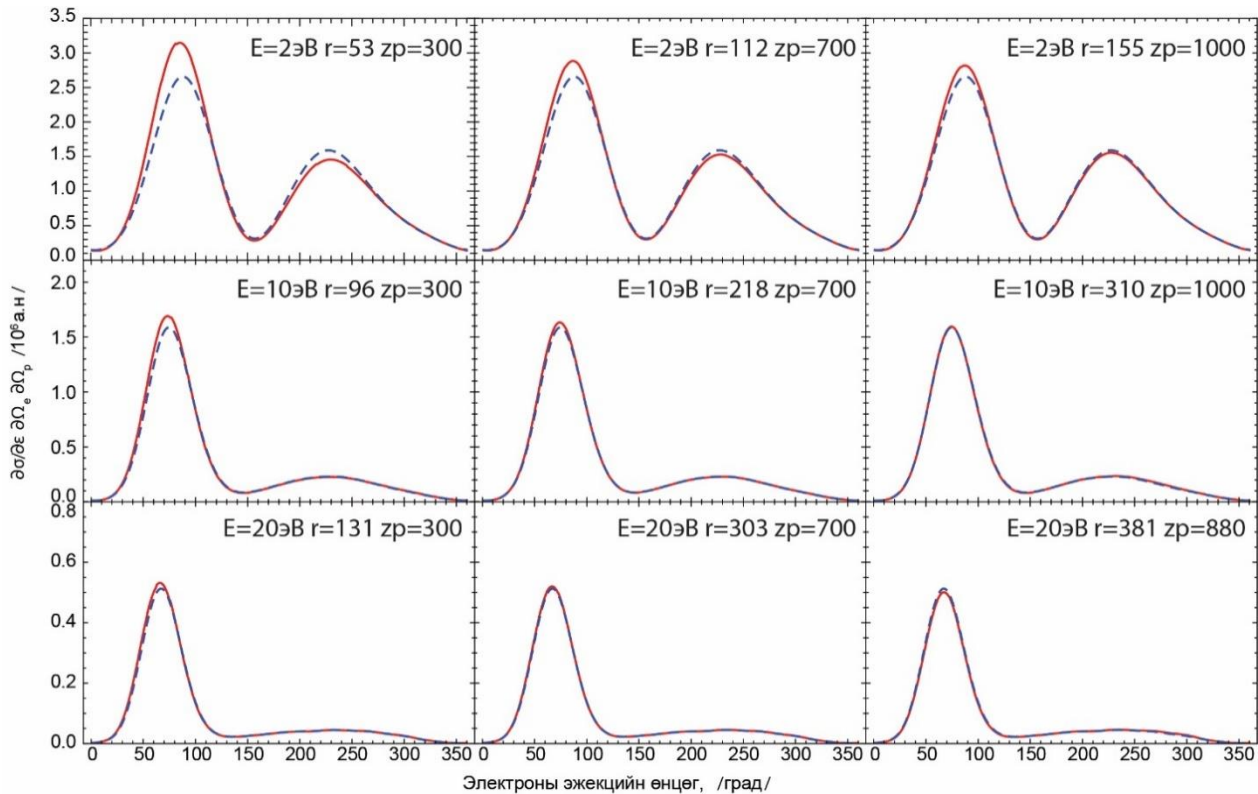


Зураг 8. 200 кэВ энергитэй протон устөрөгчийн атомыг мөргөн 0.2 мрад өнцгөөр сарних үеийн сарнилын хавтгай дээрх бүрэн дифференциал огтлол, Энд E эжекцийн энерги, zp протоны z координат, r электроны

радиал координат. Улаан мурий шугам нь шинээр тодорхойлсон ДФТ-БДО, тасархай цэнхэр мурий нь уламжлалт аргаар тооцоолсон АТ-БДО болно.

Антипротон устөрөгчийн атомын мөргөлдөөний хувьд дээрх хоёр аргаар тооцоолсон үр дүнг зураг 9 –д үзүүлэв. Зураг 8 болон 9-д эжекцийн энерги 2эВ үед нийлэлт муу байгаа нь удаан электрон цөмтэйгөө ойр байгаа учир холбоост төлвийн хандив нөлөөлж байгаатай холбоотой

байж болох юм. Бага эжекцийн энергийн хувьд удаан нийлэлттэй байгаа бол дундаж энергийн хувьд харьцангуй хурдан нийлж байна. Зураг 8,9-д эжекцийн энерги 20эВ үед 10эВ эжекцийн энергтэй тохиолдлоос илүү богино хугацаанд нийлж байгааг харж болно.



Зураг 9. 200 кэВ энергитэй антипротон устөрөгчийн атомыг мөргөн 0.2 мрад өнцгөөр сарних үеийн сарнилын хавтгай дээрх бүрэн дифференциал огтлол, Энд E эжекцийн энерги, z_p протоны z координат, r электроны радиал координат. Улаан мурий шугам нь шинээр тодорхойлсон ДФТ-БДО, тасархай цэнхэр мурий нь уламжлалт аргаар тооцоолсон АТ-БДО болно.

ДҮГНЭЛТ

Хугацаанаас хамаарсан долгион функцээр БДО огтлолыг тооцоолсон үр дүн нь хугацааны их утганд буюу электрон цөмөөсөө холдоход амплитудаар бодсон БДО-н утгатай нийлж байгаа нь харагдаж байна.

Энэхүү арга нь уламжлалт аргатай харьцуулахад огторгуйн болон хугацааны их мужид тооцоолох шаардлагатайгаараа сул талтай боловч $\Psi_{\vec{k}}^{(-)}$ долгион функц ашиглахгүй байгаа нь давуу талыг бий болгож байна.

Учир нь олон электронт атомын хувьд $\Psi_{\vec{k}}^{(-)}$ нь бэлэн тодорхойлогдоогүй байдаг учир БДО-г

тооцоолоход бэрхшээл үүсдэг. ДФТ-БДО-н (7) томъёог хэрэглэснээр энэ бэрхшээлээс ангижирах боломжтой.

АШИГЛАСАН МАТЕРИАЛ

- [1] S. Jones and D. H. Madison, Phys. Rev. A 65, (2002) 052727.
- [2] A. V. Voitkiv and J. Ullrich, Phys. Rev. A 67, (2003) 062703.
- [3] A. Igarashi, S. Nakazaki, and A. Ohsaki, Phys. Rev. A, Vol 61, (2000) 062712.
- [4] Xiao-Min Tong, Tsutomu Watanabe, Daiji Kato and Shunsuke Ohtani. Phys. Rev. A, volume 64, (2001) 022711.

- [5] M. McGovern, D. Assafrao, J. R. Mohallem, C. T. Whelan, and H. R. J. Walters, *Phys. Rev. A* 79, (2009) 042707.
- [6] M. McGovern, D. Assafrao, J. R. Mohallem, C. T. Whelan, and H. R. J. Walters, *Phys. Rev. A* 81, (2010) 032708.
- [7] I. B. Abdurakhmanov, A. S. Kadyrov, I. Bray, and A. T. Stelbovics, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 44, (2011) 165203.
- [8] M. F. Ciappina, T.G. Lee, M. S. Pindzola, and J. Colgan, *Phys. Rev. A* 88, (2013) 042714.
- [9] I. B. Abdurakhmanov, A. S. Kadyrov, and I. Bray, *Phys. Rev. A* 94, (2016) 022703.
- [10] A. I. Bondarev, Y. S. Kozhedub, I. I. Tupitsyn, V. M. Shabaev, and G. Plunien. *Phys. Rev. A* 95, (2017) 052709.
- [11] K.M. Dunseath, J.M Launay, M Terao-Dunseath and L Mouret *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 35 (2002) 3539–3556
- [12] Peng. Liang-You and Starace. Anthony F, *The journal of chemical physics* 125, (2006) 154311.
- [13] G. Zorigt, L. Khenmedekh, Ch. Aldarmaa, *IJMA-* 10(5), (2019) 19-23.
- [14] A. I. Bondarev, I. I. Tupitsyn, I.A.Maltsev, Y. S. Kozhedub,, and G. Plunien. *Eur.Phys. J.D* 69,110 (2015).
- [15] L. D. Landay and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics. Norelativistic Theory*, 4th ed. (1989).
- [16] J. Azuma, N. Toshima, K. Hino, and A. Igarashi, *Phys. Rev. A* 64, 062704 (2001).
- [17] Emil Y Sidky and C D Lin. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 31 (1998) 2949–2960
- [18] J. C. Wells, D. R. Schultz, P. Gavras and M. S. Pindzola. *Phys. Rev. A* 54, (1996)
- [19] B. Pons. *Phys. Rev. A* 63, (2000) 012704.