

# Вилсон урсгалын арга ашиглан тооцоолсон цэвэр гейж SU(3) урсгалын хоолойн зарим нэг үр дүнгүүд

П. Баттогтох<sup>1\*</sup>, Ч. Содбилэг<sup>1</sup>, О. Качмарек<sup>2</sup>, Г. Энхтуяа<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Шинжлэх Ухааны Академи, Физик Технологийн Хүрээлэн

<sup>2</sup>Билефелдийн Их Сургууль, Физикийн Тэнхим

Бид градиент урсгалын аргын латтис онол дахь тухайн тохиолдол болох Вилсон урсгалын аргын хэмжилтийн алдаа бууруулах шинж чанарыг энэ судалгааны ажлаар судалж, түүнийгээ өөрсдийн програмд хэрэглэх аргачлалыг боловсруулсан. Энэ аргачлалаараа цэвэр гейж орны конфигурацуудыг  $32^3 \times 8$  эзлэхүүнтэй латтис дээр,  $T/T_c = 1.29$  утганд үүсгэж,  $t = 0.01, 0.03, 0.05$  гэсэн урсгалт хугацааны утгууд дээр урсац конфигурацуудыг тооцоолж авсан. Энэхүү конфигурацуудаараа урсгалын хоолойн түгэлтийг кварк хоорондын зай  $R = 4a - 8a$  үед тооцоолсон. Энэ үр дүнгүүд нь урсгалт хугацаа өсөх хэрээр, дохио нь илүү бага шуугиантай утгууд өгч байгаа боловч, Вилсон урсгалын смийр шинж чанар (smearing effect)-ын улмаас тухайн хэмжигдэхүүний өгөх зарим хэсэг мэдээллүүд алдагдах аюултай гэдгийг харуулж байна.

Түлхүүр үгс: Wilson flow, fluxtube, smooth field, smearing effect, SU(3) gauge theory, ultra violet fluctuation.

## УДИРТГАЛ

Градиент урсгалын арга [1] нь гейж онолын судалгаанд маш чухал ач холбогдолтой арга юм. Нэмэлт урсгалт хугацааны координат  $t$ -г оруулж ирснээр SU(3) гейж орны урсгалын тэгшитгэл

$$\begin{aligned} \dot{B}_\mu(x, t) &= D_\nu G_{\nu\mu}(x, t), \\ D_\nu &= \partial_\nu + [B_\nu(x, t), \cdot] \end{aligned} \quad (1)$$

гэсэн хэлбэртэй болно. Энэ тэгшитгэлд цэгээр  $t$ -ийн нэгдүгээр эрэмбийн уламжлалыг,  $G_{\nu\mu}$ -ээр гейж орны орны хүчлэгийн тензорыг тэмдэглэнэ. Нэмэлт координатыг оруулахгүйгээр гейж орон  $B_\mu(x, t)$  нь үндсэн гейж орон  $A_\mu$ -тэй тэнцүү байна. Урсгалийн тэгшитгэл нь [4]-ээс харахад үйлчлэлийн градиенттай пропорционал

$$D_\nu G_{\nu\mu}(x, t) \sim \frac{\delta S_G[B_\mu]}{\delta B_\mu} \quad (2)$$

буюу урсгалын дагуу гейж орон гөлгөр (smooth) байна. Энэ нь урсгал эцсийн эцэст Янг-Миллсийн үйлчлэлийн хамгийн бага цэгэн утгуудад хүрнэ гэсэн үг бөгөөд гейж орны топологийг судлахад чухал ач холбогдолтой байдаг.

Мөн гейж онолууд нь хэт ягаан туяаны мужид флукутацтай байна. Иймд латтис гейж онолоор

тодорхойлсон хэмжигдэхүүнүүд нь энэхүү богино зайн флукутацад нэрвэгдсэн байна. Градиент урсгал нь орныг гөлгөр болгосноор энэ хэт ягаан туяаны муж дахь флукутацыг шүүдэг онцлогтой. Өөрөөр хэлбэл корреляцын функцүүд энэ гөлгөр оронд маш сайн тодорхойлогдсон тасралтгүйн хязгаартай байна. Энэ ажлаар бид энэхүү урсац шинжийг өөрсдийн програмд ашиглаж, зарим нэг шинж чанаруудыг нь судлах болно.

Латтис оронд урсгал тодорхойлсноор орон нь нялагдсан буюу смийрэд (smeared) шинжтэй болдог. Энэ нялалтын радиус  $r_{smear}$ -ийг холбоосын тогтмол  $g$  дээрх хөндөх онолын дээд эрэмбийн гишүүдээс олж болно. Энэ нь  $r_{smear} = \sqrt{8t}$  байна. Корреляторын спектрал төлөөлөлд спектрал жинг бууруулснаар  $r_{smear} \geq \tau$  зай,  $\pi/r_{smear} \geq \omega$  давтамжид корреляцын функцийн хэт ягаан муж дахь флукутацыг бууруулна.

[5] –аас урсгалын латтис томъёолол нь линк хувьсагчаар

$$\begin{aligned} \dot{U}_t(x, \mu) &= -g_0^2 \{ \partial_{x, \mu} S_W(U_t) \} U_t(x, \mu), \\ U_t(x, \mu)|_{t=0} &= U(x, \mu) \end{aligned} \quad (3)$$

гэж илэрхийлэгдэнэ. Энд  $\partial_{x, \mu}$  нь SU(3) Ли-Алгебрийн утгатай дифференциал оператор. Бид  $S_W$ -ийг стандарт Вилсон үйлчлэл

\* E-mail address: pbattogtokh@gmail.com

$$S_W(U) = 1/g_0^2 \sum_p \text{Re Tr}\{1 - U(x, \mu)\} \quad (4)$$

ээр сонгож авна. Энд  $p$  бүх плакетын дагуу гүйнэ. Иймээс зарим тохиолдолд градиент урсгалыг Вилсон урсгал гэж нэрлэнэ. Энэ тэгшитгэлийг тоон аргаар шийдэхдээ  $f(U)$  функцэд үйлчлэх  $SU(3)$  утгатай дифференциал оператор

$$\partial_{x,\rho}^a f(U) = \frac{d}{dt} f(U_t)|_{t=0}, \quad (5)$$

$$U_t(y, \sigma) = \begin{cases} e^{tT^a} U(x, \rho), & \text{if } (y, \rho) = (x, \rho) \\ U(y, \rho), & \text{бусад үед} \end{cases}$$

-ыг хамгийн эхэнд тодорхойлно. Энд  $T^a$  нь  $SU(3)$  генератор. Дараа нь энэ тодорхойлолт ба плакетийн илэрхийлэл мөн үржвэрийн дүрэм зэргийг хэрэглэсний дараа Вилсон урсгалын тэгшитгэлийн гол хэсгийг тооцвол  $\partial_{x,\rho} S_W(U_t) = \frac{1}{2g_0^2} (\Omega(x, \rho) - \Omega^\dagger(x, \rho)) - \frac{1}{6g_0^2} \text{Tr} (\Omega(x, \rho) - \Omega^\dagger(x, \rho))$ ,

$$\Omega(x, \rho) = U(x, \rho) W^\dagger(x, \rho) \quad (6)$$

гэсэн маш компакт хэлбэрт орно. Энд  $W^\dagger(x, \rho)$  нь гурван линк хувьсагчийн үржвэр буюу степл хувьсагчийн тодорхойлогч байна. Одоо латтис дээрх урсгалын тэгшитгэл нь

$$\frac{d}{dt} U_t(x, \mu) = \left[ \frac{1}{2} (\Omega(x, \mu) - \Omega^\dagger(x, \mu)) - \frac{1}{6} \text{Tr} (\Omega(x, \mu) - \Omega^\dagger(x, \mu)) \right] U_t(x, \mu) \quad (7)$$

гэсэн хэлбэртэй болно. Энэ томъёоллыг илүү дэлгэрэнгүйгээр [2]-оос харах боломжтой. Урсгалын тэгшитгэлийн энэ томъёолол нь энгийн линк хувьсагчдаар бүрэн тодорхойлогдох бөгөөд тоон аргаар бүрэн шийдэх боломжтой байдаг.

Энэ (6) тэгшитгэлийн хэлбэр нь урсгалт хугацаа  $t$  -ээс хамааран монотонор буурдаг функц байна. Үүнээс урсгал нь хязгааргүй бага хэмжээтэй маш олон линкүүдийн нялалтаар бүтээгдсэн юм шиг буюу латтис орныг гөлгөр болгож байна гэж үзнэ [3]. Ингэснээр хэт ягаан муж дахь флукуацыг шүүх боломжтой болно.

## ТООН ТООЦООЛЛЫН ҮНДЭС

Одоо бидний гол шийдэх ажил (7) томъёогоор өгөгдсөн нэгдүгээр эрэмбийн дифференциал тэгшитгэл

$$\frac{d}{dt} U_t(x, \mu) = f(U) U_t(x, \mu)$$

-ийг бодох ажил болно. Үүний тулд тооцон бодох арга хэрэглэнэ. Олон янзын аргачлал байдаг бөгөөд тэдгээрийн дундаас хамгийн нарийвчлал сайтай хурдан шийдэх арга Рунге-Куттаг бид өөрсдийн ажилдаа авч ашигласан. Энэ хэсэгт бид уг тоон аргаар бодлогыг хэрхэн шийдэх аргачлал болон өөрсдийн програмдаа ашиглах алгоритмын онцлогуудын талаар авч үзэх болно.

## Рунге-Кутта

Ерөнхий тохиолдолд аналитикаар шийдийг нь олох боломжгүй байхад бид тооцон бодох аргачлал хэрэглэдэг билээ. Ердийн дифференциал тэгшитгэл

$$y'(t) = F(t, y(t)), y(t_0) = y_0, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (8)$$

-ийг анхны утгаас нь хөөж ойролцоолон бодох аргачлалыг Рунге-Кутта арга гэнэ. Энд  $y(t)$  нь аналитик шийд,  $t_n$  тасралттай цэгүүд дээр тооцоолсон ойролцоо шийдийг  $y_n$  гэвэл  $S$  алхамтай Рунге-Кутта арга нь дээрх тэгшитгэлийн шийдийг Хүснэгт 1.-д өгөгдсөн алгоритмаар тооцоолно.

Хүснэгт 1. Ерөнхий Рунге-Кутта аргын алгоритм.

---

**For**  $r=1:S$  **do**

$$T_r = hc_r + t_n$$

$$Y_r = h \sum_{k=1}^S a_{rk} F_k + y_n$$

$$F_r = hF(T_r, Y_r)$$

**end**

$$y_{n+1} = \sum_{k=1}^S b_k F_k + y_n$$


---

Энд  $h$  нь дараалсан  $t_n$ -ээс  $t_{n+1}$ -ийн хоорондох алхам,  $a_{rk}, c_r$  аргачлал бүрт өөр өөрөөр интеграл

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

-д хамаарах талбайн хэмжээснээс хамааруулан олж болох тогтмол. Үүнээс үзэхэд ерөнхий Рунге-Кутта арга нь тодорхойгүй байдаг. Харин  $r \geq k$  үед  $a_{rk} = 0$  болж энэ арга нь илэрхий болно. Гурван алхамтай Рунге-Кутта арга

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}F_1 + \frac{4}{6}F_2 + \frac{1}{6}F_3 \\
 F_1 &= hF(t_n, y_n) \\
 F_2 &= hF(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}F_1) \\
 F_3 &= hF(t_n + h, y_n - hF_1 + 2hF_2)
 \end{aligned}$$

гэсэн хэлбэртэй байна.

Бид энэ ажлаар SU(3) Ли бүлэгт тодорхойлогдсон дифференциал тэгшитгэлийг шийдэх гэж байгаа билээ. Нарийн тодорхойлбол

$$F(y) = \dot{y} = A(y)y, \quad y \in G, \quad A(y) \in \mathfrak{g} \quad (9)$$

байх ба энд  $G$  нь Ли бүлэг,  $\mathfrak{g}$  Ли алгебр байна. Энэ үед  $y \in G, z \in G$  байх тохиолдолд  $y + hA(z)z \notin G$  байх учир бид (8)-д ашигласан аргаа шууд (9)-д ашиглах боломжгүй юм. Үүнийг бид Гроуч-Гроссман [7] арга ашиглан шийднэ. Энэ нь шинэчлэл хийх хэсэг  $hA(y)$ -ийг  $e^{hA(z)}$ -ээр сольж оруулснаар шийдэгдэнэ. Энэ нь маш олон тооны экспоненциал бодох шаардлага үүсгэдэг боловч бид эдгээрийг Мунте-Кассын арга [8] ашиглан хялбархан шийднэ. Ингээд Ли бүлгийн элементүүдийн хувьд бичсэн гурван түвшинт Рунге-Кутта алгоритмыг Хүснэгт 2.-д харуулав.

Хүснэгт 2. Ли бүлгийн элементүүдийн хувьд бичсэн гурван түвшинт Рунге-Кутта алгоритм.

**For**  $r=1:S$  **do**

$$\begin{aligned}
 Y_r &= \exp(\sum_k \alpha_{rj}^k F_k) \dots \exp(\sum_k \alpha_{r1}^k F_k) y_n \\
 F_r &= hF_{Y_r} = hA(Y_r)
 \end{aligned}$$

**end**

$$y_{n+1} = \exp(\sum_k \beta_j^k F_k) \dots \exp(\sum_k \beta_1^k F_k) y_n$$

Энд  $\alpha_r^k = \sum_{j=1}^J \alpha_{rj}^k, b^k = \sum_{j=1}^J \beta_j^k$  байна. Бид тусгай тохиолдолд Ли бүлэг нь шугаман огторгуйтай тэнцүү гэвэл экспоненциалууд нь  $\exp(hF_p)y_n = y_n + hF_p$  гэж бичигдэж болно. Энэ үед энэ алгоритм энгийн стандарт Рунге-Кутта аргын алгоритм болно.

[1]-д Мартин-Люшер илэрхий гурван гишүүнт Рунге-Куттагийн коэффициентуудыг

$$\begin{aligned}
 y_{n+\epsilon} &= \exp\left(\frac{3}{4}F_2 - \frac{8}{9}F_1 + \frac{17}{36}F_0\right) Y_2 \\
 Y_0 &= y_n \\
 Y_1 &= \exp\left(\frac{1}{4}F_0\right) Y_0 \\
 Y_2 &= \exp\left(\frac{8}{9}F_1 + \frac{17}{36}F_0\right) Y_1 \\
 F_i &= \epsilon A(Y_i)
 \end{aligned}$$

гэж олсон байдаг. Энд  $\epsilon$  нь алхмын хэмжээ юм. Нийт үйлдлийн алдаа  $\epsilon^3$  байхад энэ үед үүсэх ойролцооллын алдаа нь  $\epsilon^4$  байна.

### Програмчлахад хэрэгтэй алхмууд

Дээрх Вилсон урсгалын програм нь маш их тооцооллын хугацаа шаарддаг. Тиймээс бид эл аргыг програмчлахдаа параллельчлэн хурдасгах шаардлагатай тулгардаг. Үүний тулд бид эхлээд латтисыг нэг GPU-ний цөмүүд дээр, эсвэл салангид олон GPU дээр дэд хэсгүүд болгон хуваарилна. Бидний хувьд нэг GPU-д зориулан програмаа зохиосон билээ. Үүний дараа линк нялалтыг бүх дэд латтисууд дээр параллелиар гүйцэтгэнэ.

Хүснэгт 3. Рунге-Кутта аргыг програмчлах дараалал.

1. Эхний гейж орны линк хувьсагчдын утгаар  $F_0$  -ийн утгыг тооцоолж хоёр дахь гейж оронд хадгална.
2. Өмнө тооцоолсон  $F_0$  -оор  $Y_1$  -ийг тооцоолж нэгдүгээр гейж оронд хадгална.
3. Халонууд солилцох.
4. 1 болон 2-р гейж орныг ашиглан  $\frac{8}{9}F_1 - \frac{17}{36}F_0$  -ийг тооцоолж үр дүнг 2-р оронд хадгална.
5. 2-р оронд хадгалсан үр дүнгүүдийн экспоненциалаар  $Y_2$ -ийг тооцоолж үр дүнг 1-рт хадгална.
6. Халонууд солилцох.
7. 1 болон 2-р гейж орныг ашиглан эцсийн нялагдсан орон  $y_{n+\epsilon}$  -ийг тооцоолно.

Энэ үед нэг дэд латтис дотор тооцоолол хийхэд тухайн үйлдэлтэй холбоотой латтисын холбоос шугамуудын өгөгдөл л зөвхөн хэрэгтэй байдаг. Тиймээс энэ орчинд хийж буй үйлдлүүдийн хооронд ямар нэг өгөгдөл шилжүүлэх шаардлага гардаггүй. Харин дэд латтисуудын захын холбоос шугамуудад эргэн тойрныхоо үйлдлүүдээс мэдээлэл хүлээж авах, хувиуллах шаардлага үүснэ. Иймд захын холбоосууд дээрх бүх үйлдлүүдийг хало (halo – гэрэлт хүрээ) гэж нэрлэгдэх нэмэлт санах ойн огторгуйд байршуулах шаардлагатай болдог. Эндээс мэдээлэл солилцоноор дэд латтисын захын холбоос хувьсагчид хоорондоо холбогдоно.

Үүнийг солилцооны халонууд (exchange halos) гэнэ.

Сүүлд нь гуравдугаар эрэмбийн Рунге-Кутта аргыг програмчилна.

Рунге-Кутта аргыг програмчлахдаа эхлээд хоёр тусдаа гейж орныг тодорхойлно. Эхний гейж орон нь нялагдсан гейж орныг хадгална. Харин нөгөөх нь Рунге-Кутта алгоритм дахь экспонентуудын үр дүнд үүсэх түр зуурын орны утгуудыг хадгална. Рунге-Кутта алгоритм нь Хүснэгт 3.-ээр үзүүлсэн схемийн дагуу ажиллана.

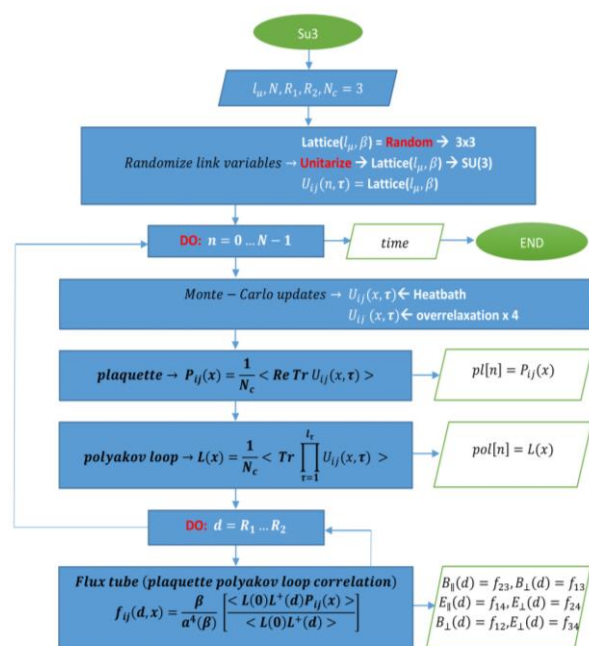
Энэ алгоритмыг хүссэн урсгалт хугацаа  $t_d = n\epsilon$  болтол  $n$  удаа давтана. Энэ үед сонгож авсан урсгалт хугацааны утгууд дээрх урсгалт орны конфигурацуудыг дата хэлбэрээр хадгалж авч ашиглана. Эдгээрийг урсац конфигурац гэе.

## ПРОГРАМЧЛАЛ

Энэ ажлыг гүйцэтгэхдээ бид хоёр салангид програм ашиглан хэмжилтийн алдааг бууруулах аргачлал боловсруулсан. Эхний програм нь урсгалын хоолойн түгэлтийг бодоход зориулан өөрсдөө зохиосон  $SU(3)$  CUDA програм. Хоёр дахь нь Бийлефелдийн их сургуульд зохиогдсон нэг GPU-нд зориулсан ParallelGPUCode гэх програм. Эхний програмаар цэвэр гейж орны конфигурацуудыг тооцоолон хадгалаад дараа нь түүнийгээ хоёр дахь програмаар бодуулж орны урсац конфигурацуудыг гаргаж авсан. Эцэст нь эхний програмаараа уг урсац конфигурацуудаараа уншуулан урсгалын хоолойг бодуулж үр дүн хэсэгт тодорхойлсон операторуудыг тооцоолсон.

### Манай програм

Бид өмнө ашиглаж байсан CUDA хэлээр бичигдсэн  $SU(2)$  цэвэр гейж онолын програм болон Португалийн физикчдийн зохиосон  $SU(3)$  цэвэр гейж онолын програм [9]-ыг ашиглан өөрсдийн шинэ тооцооны програмаа боловсруулсан. Манай програм нь цэвэр гейж конфигурацуудыг нэг псевдо хитбат дөрвөн оверрелаксешн алгоритм ашиглан үүсгэдэг бөгөөд уг конфигурацуудаараа плакет, Поляков гогцооны магадлалын утга, Поляков гогцооны корреляц, урсгалын хоолойн түгэлтийг хэмждэг. Програмын ерөнхий алгоритмыг Зураг 1.-д харууллаа. Манай програмын талаар илүү их мэдээллийг [6] –аас унших боломжтой.



Зураг 1. Урсгалын хоолой хэмжих  $SU(3)$  програмын алгоритм.

### ParallelGPUCode

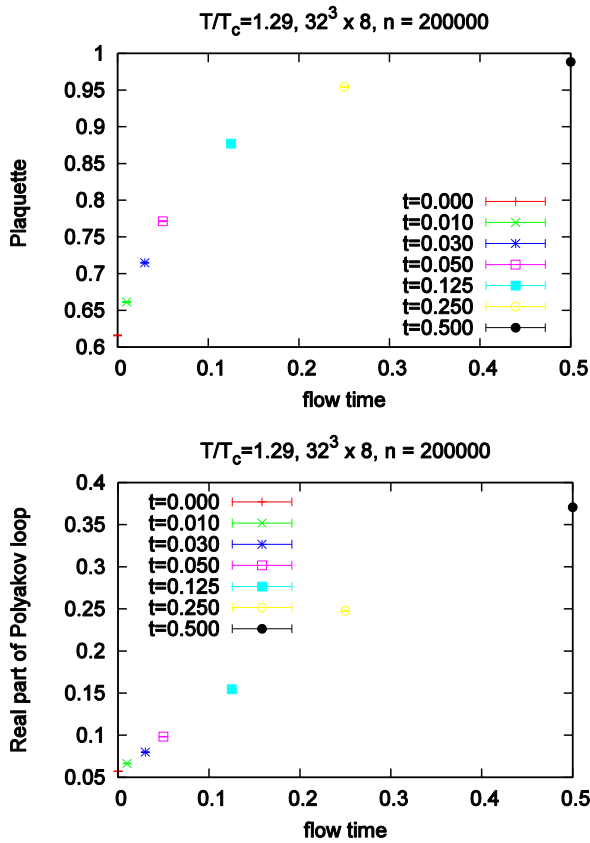
Энэ нь Бийлефелдийн их сургуулийн физикийн тэнхмийн латтис судалгааны багийн нэг GPU –нд зориулан зохиосон багц програм юм. Энэхүү програмыг 2018 оны хавар ХБНГУ-д гүйцэтгэсэн хоёр сарын томилолтын хугацаанд эзэмшиж, ажиллагааг шалгаж, зарим нэг алдааг засаж тохируулах ажилд оролцон, цаашид судалгаандаа ашиглах боломжтой болсон билээ. Энэ програмын нэг чухал боломж нь цэвэр гейж орны болон динамик кваркын хэмжилтүүдээс үүссэн конфигурацуудын датаг урсац конфигурац болгон тооцоолох боломж юм. Энэ програм нь ажиллах зарчмын хувьд латтисыг дэд хэсгүүдэд хувааж, хало функционал ажиллагаагаар параллельчлэгдэж, өмнөх тоон тооцооллын үндэс бүлэгт загварчилсан схемийн дагуу ажилладаг. Энэ програмын холболтын интерфейс болон дата унших, бичих дэд хэсгүүд нь МПИ (MPI - Messaging Passing Interface) –д суурилсан байдаг.

Мөн програм нь бүхий л латтис тооцоололд шаардлагатай суурь багцуудыг агуулсан бөгөөд цаашид бид өөрсдийн судалгааны операторыг энэхүү програмын нэг хэсэг болгон програмчлах болно.

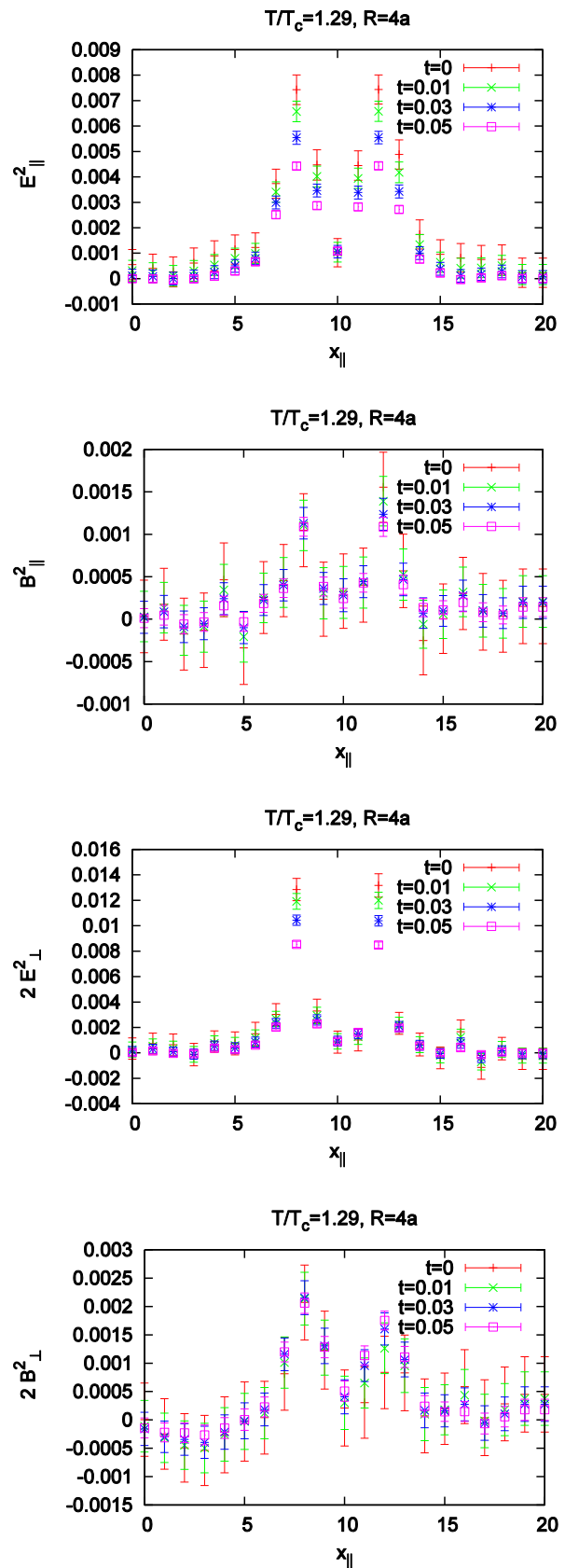
### ҮР ДҮН

Энэ ажлаар бид Вилсон урсгалын аргаар хэмжилтийн алдааг бууруулах аргачлалыг боловсруулж, тооцоолол хийж гарсан үр дүнд нь

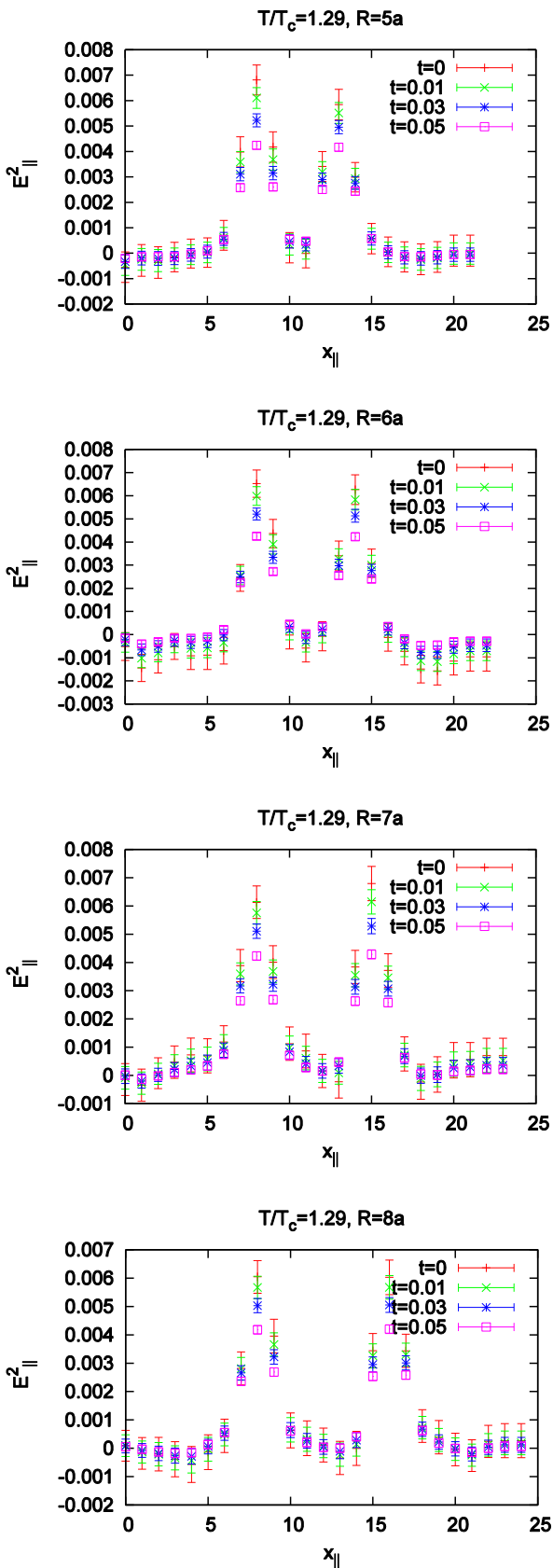
шинжилгээ хийлээ. Тухайн аргачлал маань зөв ажиллаж буй эсэхийг шалгахдаа Бийлефельдийн их сургуульд цэвэр гейж орны конфигурацын алдааг бууруулж гарган авсан плакет болон Поляков гогцооны магадлалын утгуудыг өөрсдийн програмаар дахин тооцоолж гарган авсан утгуудтайгаа харьцуулж үзсэн. Энэ үед хэмжигдэхүүний утгууд таслалаас хойш 5 болон 6 дахь орон хүртлээ таарч, түүнээс хойш зөрж байсан. Энэ нь энгийн дабл презишн (double precision) ашиглан хийж байгаа тооцоонд хангалттай нарийн үр дүн тул бидний програмын ажиллагаа хэвийн гэж үзэхэд хүрсэн. Бидний тодорхойлсон утгууд Зураг 2.-д харагдаж байна.



Зураг 2. Урсгалт хугацаанаас хамаарах плакет болон Поляков гогцооны магадлалын утгууд.



Зураг 3. Урсгалт хугацаанаас хамаарах урсгалын хоолойн түгээлт.



Зураг 4. Өөр өөр кварк хоорондын зайн дээрх өнгөт цахилгаан орны параллель байгуулагчийн түгээлт.

Энэ зурагт  $32^3 \times 8$  эзлэхүүнтэй латтис дээр температурын  $T/T_c=1.29$  утгад 200000 Монте-Карло давталттай үед цэвэр гейж орны конфигурацуудыг үүсгэж, түүнийхээ урсац

утгыг  $t=0, 0.01, 0.03, 0.05, 0.125, 0.25, 0.5$  гэсэн утгууд дээр тооцоолж, тус бүрд нь операторуудаа тодорхойлсон үр дүнгүүд харагдаж байна.

Дараагийн алхамд Вилсон урсгалын арга коррелятор хэмжигдэхүүн болох урсгалын хоолойн түгэлтийн хувьд алдааг хэрхэн бууруулж байгааг судлах зорилгоор дээрх үүсгэж авсан цэвэр гейж орны конфигурацуудаараа урсгалт хугацааны гурван өөр утга  $t=0.01, 0.03, 0.05$ -д кварк хоорондын зай  $R=4a$  үед урсгалын хоолойн түгэлтийг тооцоолсон. Эдгээр утгууд болон алдаа бууруулах арга хэрэглээгүй үр дүнг Зураг 3.-д харуулсан байна. Улаан нэмэх тэмдгээр  $t=0$ , ногоон битүү дөрвөлжин цэгээр  $t=0.01$ , хөх хэрээсэлсэн дөрвөлжин цэгээр  $t=0.03$ , ягаан хоосон дөрвөлжин цэгээр  $t=0.05$  –ийн утгыг тус тус тэмдэглэв. Хамгийн эхний плот өнгөт цахилгаан орны параллель байгуулагч, хоёр дахь плот өнгөт соронзон орны параллель байгуулагч харин гуравдугаар плотод цахилгаан орны хөндлөн түгэлтийг сүүлчийн плотод соронзон орны хөндлөн түгэлтийг хоёр кваркыг холбосон тэнхлэгийн дагуу дүрслэв. Бүх плотууд урсгалт хугацааны өсөх утгад сигнал-шуугианы харьцаа улам ихсэж, сайн үр дүн гарч байгаа харуулж байна. Гэвч тус бүрийнх нь тоон утгууд буурч байгаа нь зарим чухал дохио алдагдаж байгааг харуулсан байна. Үүнээс бид урсгалт хугацааны тохирох утгыг маш нарийн тодорхойлох шаардлагатай гэдэг нь харагдаж байна.

Эцэст нь бид урсгалын хоолойн түгэлтийн шуугиан бууруулахад кварк хоорондын зайнаас хамаарсан өөрчлөлт орох эсэхийг шалгасан. Зураг 4.-д  $R=5a, 6a, 7a, 8a$  гэсэн дөрвөн өөр зайн дээрх параллель өнгөт цахилгаан орны түгэлтийг хоёр кваркыг холбосон шулууны дагуух тэнхлэг дээр нь  $t=0, 0.01, 0.03, 0.05$  утгууд дээр дүрсэлж, харуулсан байна. Бүх плотууд дээрх урсгалт хугацаанаас хамаарсан урсгалын хоолойн түгэлтэд ямар нэг мэдэгдэхүйц корреляц ажиглагдахгүй байна. Өөрөөр хэлбэл Вилсон урсгалын арга нь бүх зайн утгад ижилхэн ажиллаж байгаа нь програмыг ямар нэг алдаагүй ажиллаж байгааг харуулж байна.

## ДҮГНЭЛТ

Вилсон урсгалын аргыг ашиглан хэмжилтийн шуугианыг дарах шинэ аргачлалыг өөрсдийн програмд нэвтрүүлээ. Энэ арга нь дараах үе шаттайгаар ажиллана.

1. Өөрсдийн зохиосон програмаар цэвэр гейж конфигурацыг дата хэлбэрээр үүсгэх.
2. Бийлефелдийн ParallelGPUCode –ийг ашиглан урсац конфигурац болгон бодуулж дата болгон хадгалж авах.
3. Өөрсдийн програмд уг датаг уншуулж холбогдох операторуудыг бодуулах.

Цэвэр гейж орны конфигурацуудыг анх  $32^3 \times 8$  эзлэхүүнтэй латтис дээр температурын  $T/T_c=1.29$  утгад 200000 Монте-Карло шинэчлэлээр үүсгэсэн бөгөөд урсац конфигурацуудыг  $t=0.01, 0.03, 0.05, 0.125, 0.25, 0.5$  гэсэн утгууд дээр бодуулж хадгалж авсан. Эдгээр конфигурацуудаараа плакет болон Поляков гогцооны магадлалын утгууд, урсгалын хоолойн түгэлтийг хэмжиж холбогдох дүгнэлтүүдийг хийлээ. Эхний хоёр магадлалын утгаас програмын ажиллагаа хэвийн гэж дүгнэсэн. Харин коррелятор хэмжигдэхүүн болох урсгалын хоолойн үр дүнгээс харахад урсгалт хугацааны утга өсөх тусам дохио шуугианы харьцаа мэдэгдэхүйц ихсэж байна. Гэвч урсгалт хугацааны утга өсөх үедээ дохионы зарим хэсгийг устгаж байна. Иймээс бид цаашид энэ аргыг хэрэглэхдээ урсгалт хугацааг нарийн нягталж, сонгох хэрэгтэй гэдэг нь энэ ажлаас харагдаж байна.

## ТАЛАРХАЛ

“Кварк конфаинмент үзэгдлийн механизмын латтис онолын судалгаа” суурь судалгааны төслийг санхүүжүүлж, уг ажлыг гүйцэтгэх боломж олгосон Монгол улсын Шинжлэх ухаан технологийн санд талархал илэрхийлье!

Мөн санхүү, програм болон техник хангамжийн тал дээр харамгүй тусалсан ХБНГУ-ын Бийлефелдийн их сургуулийн физикийн тэнхим, физикийн болон програмчлалын асуудлуудыг хэлэлцэж, нөхөрсөгөөр хамтран ажилласан тус тэнхмийн латтис группын хамт олонд талархал илэрхийлье!

## ИШЛЭЛ

- [1] M. Luescher, Properties and uses of the Wilson flow in lattice QCD, *Journal of High Energy Physics* 8, p.71 (2010).
- [2] L. Mazur, Applications of the Gradient Flow method in Lattice QCD, Master dissertation, (2017).
- [3] C. Morningstar, M. Peardon, Analytic smearing of SU(3) link variables in lattice QCD, *Phys. Rev. D* 69 (2004).
- [4] A. Ramos, The gradient flow in a twisted box, *PoS Lattice2013*, p. 053, (2014).
- [5] M. Luescher, Trivializing Maps, the Wilson Flow and the HMC Algorithm, *Communications in Mathematical Physics* 293, p. 899, (2010).
- [6] S. Chagdaa, B. Purev, E. Galsandorj, Results of programming static meson system in SU(3) lattice gauge theory, submitted into *Journal of Mongolian Physical Society*, (2017).
- [7] P. E. Crouch, R. Grossman, Numerical integration of ordinary differential equations on manifolds, *Journal of NonLinear Science* 3, p. 1–33, (1993).
- [8] H. Munthe-Kaas, High order Runge-Kutta methods on manifolds, *Applied Numerical Mathematics* 29.1, p. 115–127, (1999).
- [9] P. Bicudo, M. Cardoso, N. Cardoso, SU(3) quark-antiquark QCD flux tube, arXiv:1401.6008 [hep-lat], (2014).