Монгол Улсын Их Сургуулийн Эрдэм Шинжилгээний Бичиг №224 ФИЗИК (11):75-77, 2004

Распространение электромагнитных ТМ волн в нелинейной подложке с линейным поглощением

Г. Очирбат, Д. Улам-Оргих, Д. Гантулга, О. Нямсүрэн

Физический Факультет. Монгольский Государственний Университет

Задача распространения световых волн в нелинейной среде рассматривалась в работах [1-11]. Из них последние [6-11] посвящены к учету поглощения. Более последовательный учет поглощения удаётся в модификации метода Крылова-Боголюбова-Метропольского в задаче распространения световых волн в керр среде с линейным поглощением [11]. Мы ниже отдельно излагаем вопрос ТМ волн.

Как известно, система двух дифференциальных уравнений первого порядка для ТЕ- волн в керр среде приводится к одному уравнению второго порядка, которое представляет собой нелинейное уравнение Гельмгольца.

Однако для ТМ- волн подобное сокращение числа уравнений не имеет места. Для уравнения Гельмгольца мы выбрали схему построения асимптотического решения, полученную уместной модификацией метода Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБММ). Для ТМ-волн нам пришлось внести в эту схему дополнение, адекватное системе двух комплексных уравнений.

Волна в подложке представляется в виде

$$E_x = \frac{1}{2} i\bar{A}(\bar{z})\exp(i(\beta k_0 x - \omega t)) + c.c,$$

$$H_y = \frac{1}{2} H(\bar{z})\exp(i(\beta k_0 x - \omega t)) + c.c,$$

$$E_z = \frac{\beta^2}{\varepsilon^2} H_y, \quad E_y = H_x = H_z = 0$$

где $k_0 = \omega / c$, $\bar{z} = k_0 z$, ω-круговая частота, β – индекс рефракции. Плокость OXY лежит на поверхности подложки. Волна распространяется в направлении OX, затухая в направлении OZ. В последующем черточка над z опускается.

Уравнения для H и $\bar{A}$ запишутся как

$$\frac{d\bar{A}}{dz} = (1 - \frac{\beta^2}{\epsilon})H, \quad \frac{dH}{dz} = -\epsilon \bar{A}, \qquad (1)$$

где

$$\epsilon = \varepsilon_0 + \alpha(\overline{A}\overline{A}^{\bullet} + \frac{\beta^2 HH^{\bullet}}{\epsilon\epsilon^{\bullet}}), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon + i\delta. \qquad (2)$$

α - постоянная керра, ε_0-диэлектрическая константа, δ-величина ответственная за поглощение. В линейном приближении ($\alpha = 0$) решения этой системы выглядят как

$$\bar{A} = A_0 \exp(-\lambda z)\exp(iqz + \psi_0), \qquad (3)$$

$$H = h_0 \exp(-\lambda z)\exp(iqz + \psi_0), \qquad (4)$$

где $A_0, h_0, \lambda, q, \psi_0$-постоянные. Причём

$$\gamma = \varepsilon - \beta^2, \quad \delta = \frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

$$q^2 - \lambda^2 = \gamma, \quad \delta = 2\lambda q, \quad \lambda > 0,$$

где, σ-проводимость

Представим, что в нелинейном случае решения для $\bar{A}$ и H имеют вид, сходнный с (3),(4):

$$\bar{A} = A\exp(i\psi), \qquad (5)$$

$$H = h\exp(i\psi), \qquad (6)$$

где h и ψ-действительная амплитуда и фаза, $A(h)$-комплексная амплитуда волн.

Причем пологаем, что

$$A(h) = A_0(h) + \alpha A_1(h) + \alpha^2 A_2(h) + \cdots, \qquad (7)$$

$$\frac{dh}{dz} = -\lambda h + \alpha h_1(h) + \alpha^2 h_2(h) + \cdots \qquad (8)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = q + \alpha B_1(h) + \alpha^2 B_2(h) + \cdots. \qquad (9)$$

Здесь $h_i(h)$, $B_i(h)$- действительные, $A_i(h)$-комплексные функции. Таким образом, вместо двух комплексных функции мы ввели две действительные функции h и ψ и одну комплексную функцию A.

Теперь задача состоит в нахождении таких функций $A_0, A_1, ..., h_1, h_2, ..., B_1, B_2, ...$, что (5)и (6) будут являться решением исходной системы (1). Первый член в (8), а также в (9), выбран с таким расчетом, чтобы нулевое приближение ($\alpha = 0$) автоматически сводилось бы к (3) и (4). А именно: при $\alpha = 0$ из (8) и (9) получаем

$$h = h_0 e^{-\lambda z}, \quad \psi = qz + \psi_0. \tag{10}$$

а из второго уравнения (1) с учетом (6), (10) соответственно:

$$A_0 = \frac{-iq+\lambda}{\varepsilon_0} h = \frac{\lambda - iq}{\varepsilon_0} h_0 e^{-\lambda z}. \tag{11}$$

Введя обозначение $\nu_0 = (\lambda - iq)/\varepsilon_0$, перепишием (11) в виде

$$A_0 = \nu_0 \cdot h. \tag{12}$$

Теперь переходим к изучению возможности предлагаемой схемы асимптот- ического разложения. Из уравнений (1) по схеме (7) - (9) получаем в первом приближении

$$-\lambda h\dot{A}_1 + iA_1 q = -(\dot{A}_0 h_1 + iA_0 B_1) + \frac{\beta^2}{\varepsilon_0^2}(A_0 A_0^* + \beta^2 \frac{h^2}{|\varepsilon_0|^2})h, \tag{13}$$

$$h_1 + ihB_1 = -\varepsilon_0 A_1 - (A_0 A_0^* + \beta^2 \frac{h^2}{|\varepsilon_0|^2} A_0). \tag{14}$$

Здесь и дальше $\dot{A}_i$, с $i = 0, 1, \ldots$ обозначают производные от A_i по h.

С учетом (12) запишем

$$\dot{A}_0 h_1 + iA_0 B_1 = \nu_0 (h_1 + ihB_1), \tag{15}$$

и первое уравнение из (13) - (14) приобретает вид

$$(iq - \varepsilon_0 \nu_0)A_1 - \lambda h \dot{A}_1 = (\frac{\beta^2}{\varepsilon_0^2} + \nu_0^2)\cdot(\frac{\beta^2}{|\varepsilon_0|^2} + |\nu_0|^2)h^3 \tag{16}$$

Частное решение этого уравнения есть

$$A_1 = \nu_1 h^3, \tag{17}$$

где

$$\nu_1 = \frac{1}{iq - \varepsilon_0 \nu_0 - 3\lambda}(\frac{\beta^2}{\varepsilon_0^2} + \nu_0^2)\cdot(\frac{\beta^2}{|\varepsilon_0|^2} + |\nu|^2). \tag{18}$$

Вопрос об общем решении здесь не ставится по той же причине, что было в случае с ТЕ-поляризацией. Из (14) находим, что

$$h_1 = RR_1 \cdot h^3, \quad B_1 = RI_1 \cdot h^2 \tag{19}$$

где

$$RR_1 = -[(\varepsilon_0 \nu_1)' + (|\nu_0|^2 + \frac{\beta^2}{|\varepsilon_0|^2})\cdot \nu_0'], \tag{20}$$

$$RI_1 = -[(\varepsilon_0 \nu_1)'' + (|\nu_0|^2 + \frac{\beta^2}{|\varepsilon_0|^2})\cdot \nu_0'']. \tag{21}$$

Здесь один штрих соответствует действительной части, а два штриха-комплексной. Теперь уже вырисовывается некоторая закономерность в последовательных приближениях. А именно:

$$A_n = \nu_n h^{2n+1}, \quad h_n = RR_n \cdot h^{2n+1}, \quad B_n = RI_n \cdot h^{2n}, \tag{22}$$

где ν_n, RR_n, RI_n - постоянные. Нам только остается найти рекуррентные соотношения для ν_n, RR_n, RI_n.

Уравнения n-го приближения дают

$$-\lambda h\dot{A}_n + iqA_n = = -\dot{A}_0 h_n - \dot{A}_1 h_{n-1} - \cdots - \dot{A}_{n-1} h_1 - i(A_0 B_n + \cdots + A_{n-1}B_1) - \frac{\beta^2 h}{\varepsilon_0}\{-\frac{\epsilon_n}{\varepsilon_0} + 2\cdot\frac{\epsilon_{n-1}}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\epsilon_1}{\varepsilon_0} + \cdots + (-1)^n (\frac{\epsilon_1}{\varepsilon_0})^n\} \tag{23}$$

$$h_n + ihB_n = -(\varepsilon_0 A_n + \epsilon_1 A_{n-1} + \cdots + \epsilon_n A_0), \tag{24}$$

где ϵ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ обозначает коэффициент при i-й степени α в разложении диэлетрической функции (2).

В правой части первого уравнения имеем

$$-\dot{A}_0 h_n - iA_0 B_n = -\nu_0 (h_n + ihB_n). \tag{25}$$

С учетом (25) перепишем (23) в виде

$$-\lambda h\dot{A}_n + (iq - \nu_0\varepsilon_0)A_n = \nu_0(\epsilon_1 A_{n-1} + \cdots + \epsilon_n A_0) - -(\dot{A}_1 h_{n-1} + \cdots \dot{A}_{n-1} h_1 +_{n-1}) - i(A_1 B_{n-1} + \cdots + A_{n-1}B_1) - \frac{\beta^2 h}{\varepsilon_0}\{-\frac{\epsilon_n}{\varepsilon_0} + 2\cdot\frac{\epsilon_{n-1}}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\epsilon_1}{\varepsilon_0} + \cdots (-1)^n (\frac{\epsilon_1}{\varepsilon_0})^n\}. \tag{26}$$

Из первых двух приближений мы нашли, что

$$\epsilon_0 = \varepsilon_0, \quad \epsilon_1 = \varepsilon_1 \cdot h^2, \quad \epsilon_2 = \varepsilon_2 \cdot h^4. \tag{27}$$

где ε_1 и ε_2-коэффициенты, независящие от h. Находим из (26), что

$$\nu_n = \frac{1}{-(2n+1)\lambda + iq - \nu_0\varepsilon_0}\{\nu_0(\varepsilon_1 \nu_{n-1} + \cdots + \varepsilon_n \nu_0) - -(3\nu_1 \cdot RR_{n-1} + \cdots + (2n-1)\cdot \nu_{n-1}\cdot RR_1) - -i(\nu_1 RI_{n-1} + \cdots + \nu_{n-1}\cdot RI_1) - -\frac{\beta^2}{\varepsilon_0}\cdot(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} + 2\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \cdots (-1)^n (\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0})^n)\}, \tag{28}$$

где ε_n вычилляется не в n-м приближении, а в $(n-1)$-м приближении. После того как ν_n вычислен, получим из (24)

$$RR_n = -(\varepsilon_0 \nu_n + \cdot + \varepsilon_n \nu_0)'. \tag{29}$$

$$RI_n = -(\varepsilon_0 \nu_n + \cdot + \varepsilon_n \nu_0)'' \tag{30}$$

Здесь штрих и два штриха обозначают, как и выше, действительную и комплекс- ную части выражения в скобках.

Таким образом, показано, что согласно схеме (7) - (9) уравнения решаются очень просто.

Для анализа полученного решения исследуем предельный случай без поглошения $(\delta = 0)$. Для этой цели используем точный результат, полученный в[5]:

$$E_z^2 = \frac{\beta^2}{2\beta^2 - \epsilon} \cdot \frac{1}{\epsilon} \cdot \left(\frac{\epsilon^2 - \varepsilon^2}{2\alpha} - cnst\right), \qquad (31)$$

$$h^2 = \frac{\epsilon^2}{\beta^2} E_z^2. \qquad (32)$$

Пологая, что $cnst = 0$, находим из этих соотношений уравнение

$$\epsilon^2 = \varepsilon^2 + 2\alpha\left(\frac{2\beta^2}{\epsilon} - 1\right) \cdot h^2. \qquad (33)$$

Отсюда

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda^2 + \beta^2}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2\varepsilon}\varepsilon_1^2 - \frac{2\beta^2}{\varepsilon^3}\varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2\varepsilon^2}\varepsilon_1^3 + \frac{5\beta^2}{\varepsilon^4}\varepsilon_1^2 + \frac{4\beta^4}{\varepsilon^6}\varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\varepsilon^3}\varepsilon_1^4 - 11 \cdot \frac{\beta^2}{\varepsilon^5}\varepsilon_1^3 - 24\frac{\beta^4}{\varepsilon^7}\varepsilon_1^2 - 8\frac{\beta^6}{\varepsilon^9}\varepsilon_1. \qquad (34)$$

Для сравнения попытается вычислить эти коэффициенты с помощью полученного приближенного решения. Вычисления дадут

$$\nu_1 = -\frac{1}{4\lambda} \cdot \varepsilon_1^2$$

$$\nu_2 = \frac{\varepsilon_1^2}{6\lambda}\left(\frac{\lambda^2 + 7\beta^2}{6\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon_1(13\lambda^2 - 3\beta^2)}{16\lambda^2\varepsilon}\right),$$

$$\nu_3 = -\frac{1}{8\lambda} \cdot \{(6\varepsilon_1\nu_0 + 8\varepsilon\nu_1) \cdot \nu_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3\}$$

$$-\varepsilon_2\left(\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon} + \frac{2\beta^2\varepsilon_1}{\varepsilon^3}\right) + \frac{\beta^2}{\varepsilon^4}\varepsilon_1^3 + 3\nu_1^2\varepsilon_1\}. \qquad (35)$$

Вычесленные с помощью этих соотношений по формуле (2) значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ в точности совпадают с (34).

Для определения зависимости амплитуды h от z вычисляется интеграл

$$z = \int^h \frac{dh}{-\lambda h + \alpha h_1(h) + \alpha^2 h_2(h) + \cdots}.$$

Отсюда находится $h = h(z)$. После этого фаза волны операеляется как

$$\psi = qz + \int(\alpha B_1(h) + \alpha^2 B_2(h) + \cdots)dz,$$

и для зависимости амплитуды A от z используется (7), в которой следует подставить $h = h(z)$.

Abstracts

The scheme used in asymptotical methods of Krilov- Bogolubov-Mytropolsky is modified to solve a set of two Maxwell's equations in propogation problem of stationary optical TM waves in nonlinear substrate with linear absorption. Simplicity of structures of recurrent calculations affords us to easily obtain solution accurate to enough high order of small parameter.

Литература

[1]. D.Mihalache, R.G.Nazmitdinov, V.K.Fedyanin, R.P.Wang. Sov. J. Particles and Nuclei, **vol.23**.Issue 1, 1992

[2]. L.M.Kahn, K. Haang and D.L. Mills. Comparison of nonlinear optical responses of periodic and quasiperiodic superlattices. Phys Rev. B. **vol.39**,No17,1989

[3]. K.M.Leung. Exact results for scattering of electromagnetic waves with a nonlinear film. Phys. Rev.B. **vol.39**,N6,1989;

[4]. K.M.Leung and R.L.Lin. Scattering of transverse-magnetic waves with a nonlinear film: Formal field solutions in quadratures. Phys. Rev.B. **vol.44**, No10 1991

[5]. Г.Очирбат О теории рассеяния p-поляризованного света на нелинейной диэлектрической пленке, Препринт ОИЯИ 317-91-338, Дубна,1991

[6]. U.Langbein, F. Lederer, T.Peschel, U.Trutchel and D.Mihalache. Nonlinear transmission resonances at stratified dielectric media. Phys. Rep. 194, No5, 6, 1990

[7]. Kelan Huang , L.M. Kahn and D.L. Mills. Optical transmissivity of superlattices with nonlinear magnetic susceptiblity and absorption. Phys. Rev.B. **vol.41**, No, 1990

[8]. M.Li.Pons and L.Roco-Franco. Reftection of a plane wave at the boundary of a saturable absorber: Perpengicular polarization. J.Opt. Soc.Am.B/**vol.8**, No9,1991

[9]. V.G. Agranovich and V.Ya. Chernyak. Sol. St. Com. **vol.44,** No8, 1982.

[10]. V.K. Fedyanin, L.A. Uvarova. JINR preprint E17-94-301, Dubna,1994

[11]. Г. Очирбат, Д. Улам-Оргих, Д. Гантулга, О. Нямсурэн, Сообщение ОИЯИ, P17-96-38, Дубна, 1996.