МУИС, Эрдэм Шинжилгээний бичиг, Физик № 309(15), 2009, хууд. 141-152

Өөрөө цуглуулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар соронзон долгионы фаз тусгай функцээр илэрхийлэгдэх тохиол

О.Нямсүрэн, Г. Очирбат
МУИС-ийн Физик Электроникийн Сургууль

[1] өгүүлэлд өөрөө цуглуулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар тм долгионы оронд диэлектрикийн функц тусгай функцээр илэрхийлэгдэж болох параметруудын мужийг тогтоож уг мужид диэлектрикийн функцийн тусгай функцээр илэрхийлсэн илэрхийллийг бичсэн билээ. Тэрхүү мужид фазын интегралууд бас тусгай функцээр авагддаг ажээ. Ийнхүү бид өмнөх [1] ажлаа фазын интегралаар гүйцээж бүрэн гүйцэд шинжтэй болголоо.Тэхдээ [2]-д боловсоруулсан фаз тооцох схемийг тэр чигээр нь хэрэглэв.

Бид X тэнхлэг дагуу гүйхийн хамт орчны гүн тийш($z-$тэнхлэг дагуу) тарах стационар ТМ долгионы оронг

$$E_z = e(z)\exp(i\Phi_e(z))\tau,\quad E_x = iA(z)\exp(i\Phi_A(z))\tau,\quad h_y = h(z)\exp(i\Phi_e(z))\tau,$$
$$\tau = \exp(i\beta kx - i\omega t) \tag{1}$$

гэж дүрсэлсэн. Үүнд $e(z), A(z), -h(z)$ -амплитудууд, $\Phi_e(z), \Phi_A(z)$ -фазууд. β - рефракцийн тогтмол, k - вакуум дахь долгионы векторын модуль.

Ингээд Максвеллийн тэгшитгэлүүдийн хүрээнд долгионы орны байж болох горимуудыг сул параметруудаас хамааруулан аль болох бүрэн гүйцэд олж тогтоох зорилт тавьсан болно.

I Ерөнхий хэсэг

Тэгшитгэлүүд

Энергийн урсгал хадгалагдах хууль

$$\frac{1}{2}Ah\sin(\Delta\Phi) = co \tag{2}$$

Үүнд co энергийн урсгалын хэмжээ, тогтмол хэмжигдүүн, орчны гүн тийш(z тэнхлэг дагуу) тарж буй долгионд эерэг утгатай.

Соронзон ба цахилгаан компонентын фазуудын зөрүү

$$\Delta\Phi = \Phi_e - \Phi_A \tag{3}$$

Оронгийн E_z, h_y компонентыг ижил фазтай гэж авснаас болж(эдгээр компонентыг хооронд нь холбосон Максвеллийн тэгшитгэлд) h сөрөг утгатай байхад хүрдэг.

Фазын тэгшитгэлүүд

$$\frac{d\Phi_e}{dz} = 2\frac{\varepsilon}{h^2}co \tag{4}$$

$$\frac{d\Phi_A}{dz} = 2\frac{\varepsilon-\beta^2}{\varepsilon A^2}co \tag{5}$$

Энд ε .-диэлектрикийн функц. Эерэг керр орчинд

$$\varepsilon = \varepsilon_l + e^2 + A^2 \tag{6}$$

ε_l -диэлектрикийн тогтмол.

e^2, A^2, h^2 - хэмжигдүүнүүд диэлектрикийн функцийн утгаар илэрхийлэгддэг

$$e^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst) = \frac{\beta^2}{2\varepsilon(2\beta^2-\varepsilon)}(\varepsilon^2-\varepsilon_l^2-cnst), \tag{7}$$

$$A^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst) = \varepsilon-\varepsilon_l-e^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst), \tag{8}$$

$$h^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst) = \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}e^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst), \tag{9}$$

Эдгээр илэрхийллийг Максвеллийн тэгшитгэлийн анхны интегралыг, (6)-тэй системлэн бодож гаргаж авсан билээ. Үүнд $cnst$ -интегралчлалын тогтмол.

Диэлектрикийн функцийн тэгшитгэл

(2),(4-5),(10) бол орчин дахь долгионы амплитуд ба фазыг шинжлэхэд бүрэн хүрэлцэх тэгшитгэлүүд бүлгээ. Тэмдэглэл

$$F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst) = A^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst) \tag{11}$$

<u>Фазын зөрүүг нэгэн утгатай тодорхойлох боломж.</u>

(2)-д h сөрөг утгатайн улмаас $\Delta\Phi$ зөрүү сөрөг утгатай бөгөөд $co \neq 0$ тохиолд $-\pi, 0$ хязгаарын утгадаа хүрэхгүй. (2)тэгшитгэлээс синус функцийн аргумент болж буй $\Delta\Phi$ -г тодорхойлъё гэвэл нэгэн утгатай тодорхойлогдохгүй, $-\dfrac{\pi}{2}$ оос их,бага хоёр утга гарах болно. Энэ хоёр утгын алийг нь сонгож авах вэ гэсэн асуултанд (10) тэгшитгэл дэх $\cos\Delta\Phi$ -ийн тэмдэгийг шинжилж байж хариу өгч болно.

Эерэг керр орчин дахь TM долгионд ε -диэлектрикийн функц (орчны гүн тийш) z-тэнхлэг дагуу хувьсахдаа- $\beta^2, cnst, co$ - параметруудын өгөгдсөн утга бүрд эдгээр утгаар тодорхойлогдох сегмент дээр нааш цааш холхин хувьсдаг ажээ. Сегментийг $[b,a]$ гэж тэмдэглэе,үүнд ε -ийн авах хамгийн бага утга нь b , хамгийн их утга нь a . Энэ сегмент бол

$$\varepsilon \geq \varepsilon_l, \quad e^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst) \geq 0, \quad A^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst) \geq 0 \tag{12а}$$

$$F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst) - 4co^2 \geq 0 \tag{12б}$$

нөхцлүүдийг зэрэг хангах муж буюу тодорхойлолтын муж юм(II хэсэг үзнэ үү).

(10) тэгшитгэлд $\dfrac{d\varepsilon}{dz}$ -уламжлал ε -диэлектрикийн функц z-тэнхлэг дагуу b ээс a тийш өсч буй үед эерэг,харин a аас b тийш буурч буй үед сөрөг байх нь зүйн хэрэг . Үүнтэй уялдан,(10)тэгшитгэлд $\Delta\Phi$ хэмжигдүүн $-\dfrac{\pi}{2}$ ээс их бага хоёр утгыхаа зөвхөн нэгийг авах боломжтой. Хүснэгт үзнэ үү

хүснэгт

	$a < 2\beta^2$ тохиолд	$2\beta^2 < b$ тохиолд
ε -диэлектрикийн функц z-тэнхлэг дагуу b ээс a тийш өсөх үед	$-\dfrac{\pi}{2} \leq \Delta\Phi < 0$	$-\pi < \Delta\Phi \leq -\dfrac{\pi}{2}$
ε -диэлектрикийн функц z-тэнхлэг дагуу a аас b тийш буурах үед	$-\pi < \Delta\Phi \leq -\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2} \leq \Delta\Phi < 0$

$\Delta\Phi$ ийн авах утгын энэхүү тодотголыг анхаарч, (2) тэгшитгэл ашиглан (10) тэгшитгэлээс $\cos\Delta\Phi$ -г зайлуулсны дараа (10) тэгшитгэл нь

$a < 2\beta^2$ тохиолд

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{2\beta^2 - \varepsilon}{\dfrac{\varepsilon}{2} + e^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)}\sqrt{A^2h^2 - 4co^2}, \tag{13 а}$$

$2\beta^2 < b$ тохиолд

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{\varepsilon - 2\beta^2}{\dfrac{\varepsilon}{2} + e^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)}\sqrt{A^2h^2 - 4co^2}, \quad (13в)$$

гэж бичигдэнэ.

Диэлектрикийн функц координатаас хамаарах хамаарал.

$\varepsilon(z)$ -улиран хувьсдаг функц мөн

(13) тэгшитгэлээс

$$z - z(b) = \int_b^{\varepsilon} \frac{\varepsilon + 2e^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)}{2|2\beta^2 - \varepsilon|\sqrt{A^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)h^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst) - 4co^2}} d\varepsilon, \quad (14)$$

$z(b)$ бол нэгэн $\varepsilon = b$ утгад харгалзуулсан сул утга. Дээр дурдсан $[b, a]$ сегментийг тодорхойлох нөхцлүүдийн хамгийн сүүлчийн (12б) нь энэ интегралын интегранд дахь язгуур дорх илэрхийллийг сөрөг биш байлгах гэсэн нөхцөл ажээ.

(14) интегралын дээд хязгаар ε нь b ээс a хүрээд буцаад ухарч хувьсах маягаар холхин өөрчлөгдөхөд түүнийг даган z дэлгэгдэн хувьсах болно. ε нь b ээс a хүртэл хувьсах бүрд z-нь

$$d = \int_b^{a} \frac{\varepsilon + 2e^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)}{2|2\beta^2 - \varepsilon|\sqrt{A^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)h^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst) - 4co^2}} d\varepsilon, \quad (15)$$

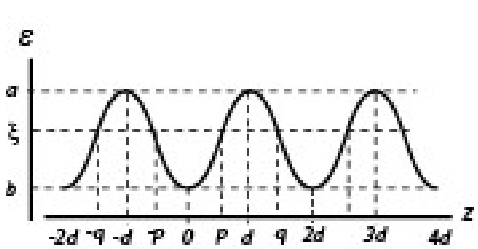
хэмжээгээр өөрчлөгдөнө. ε нь a аас b хүртэл хувьсах бүрд z-нь бас яг тийм хэмжээгээр өөрчлөгдөнө.

ε -г ,урвуугаар, $z - z(b)$ ээс хамаарсан функц гэж үзэх юм бол энэ нь $2d$ улиралтай улиран хувьсдаг функц болно, $\varepsilon = \varepsilon(z - z(b))$.

$$\varepsilon(z - z(b)) = \varepsilon(z - z(b) + 2d).$$

Энэ функц бас аль ч $z = z_n = z(b) + nd$, $n-$ дурын бүхэл тоо, цэг дээр тэгш хэмтэй. Иймээс түүнийг d урттай $[z(b), z(b) + d]$ сегмент дээр тодорхойлоход хангалттай.

(14) интеграл ерөнхий тохиолдоо элементар ба тусгай функцээр илэрхийлэгддэггүй, харин тоон тооцоогоор бодоход төвөггүй. Шаардлага гарвал интегралыг эхлээд ε -ийн b -ээс a хүртэл дэс дараалсан хангалттай олон утгад бодож $z - z(b)$ -ийн ε - ээс хамаарах хамаарлын хүснэгт үйлдэнэ. Тэрхүү хүснэгтийг хөрвүүлэхэд $\varepsilon(z - z(b))$ функцийн хүснэгтэн тодорхойлолт болно. $\varepsilon(z - z(b))$ функцийн бүдүүвч графикийг 1зурагаас харна уу.



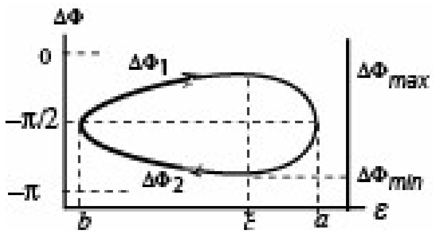
1 зураг. $\varepsilon(z)$ *улиран хувьсдаг функц.*

Улирал нь $2d$. d *-г (15),* p *-г (16) томъёо гоор тус тус тодорхойлно.* ε *-ийн авах хамгийн бага утга нь* b *хамгийн их утга нь* a . *Графикт нэгэн* $\varepsilon = b$ *утгад* $z(b) = 0$ *гэж авчээ(хэрэглэсэн тэгшитгэлүүд z ээс ил хамаараагүй болохлоор z тэнхлэгийн эхийг сул чөлөөтэй сонгох боломжтой).* $\varepsilon(z)$ *муруй* $z = z_n = nd$, n *-дурын бүхэл тоо, цэг дээр тэгш хэмтэй.* $\varepsilon = \xi$ *бол* $F(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)$ *функц максиум утга авах цэг, бас* $\Delta\Phi$ *фазын зөрүү хамгийн их ба бага утгаа авах цэг мөн.*

$$p = \int_b^{\xi} \frac{\varepsilon + 2e^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)}{2|2\beta^2 - \varepsilon|\sqrt{A^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)h^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst) - 4co^2}} d\varepsilon, \quad (16)$$

Фазын зөрүү $\Delta\Phi(z)$ -бол улирах функц мөн

(2) тэгшитгэлд $\boldsymbol{A,h}$ нь (8) , (9) томъёогоор, $\boldsymbol{\varepsilon}$ -ээр илэрхийлэгдэж байгаа. (2) тэгшитгэлээс $\boldsymbol{\Delta\Phi(\varepsilon,...)}$-г 1-р хүснэгтийг анхаарч нэгэн утгатай тодорхойлж болно. $\boldsymbol{\Delta\Phi(\varepsilon,...)}$ хамаарлын бүдүүвч графикийг 2-р зурагт үзүүлэв.



2 зураг. Сумын чиглэл $\boldsymbol{\varepsilon}$ - диэлектрикийн функц $z-$тэнхлэг дагуу өсөх, буурах чиглэлийг зааж буй. Өсөх чиглэлд фазын зөрөө $-\dfrac{\pi}{2}$ ээс их харин буурах чиглэлд $-\dfrac{\pi}{2}$ ээс бага. $\boldsymbol{\varepsilon=\xi}$ бол $\boldsymbol{\Delta\Phi}$ фазын зөрүү хамгийн их ба бага утгаа авах цэг . Энэ цэг дээр бас $\boldsymbol{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)}$ функц максиум утгаа авдаг. Гогцооны дээд ба доод хэсэгт $\boldsymbol{\Delta\Phi(\varepsilon,...)}$ функцийн хэлбэр өөр өөр. Дээд хэсэгийхийг нь $\boldsymbol{\Delta\Phi_1}$ доод хэсгийхийг нь $\boldsymbol{\Delta\Phi_2}$ гэж тэмдэглэжээ.

$\boldsymbol{a<2\beta^2}$ тохиолд

$$\Delta\Phi_1(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst,co)=-\arcsin\sqrt{\frac{F(b,\varepsilon_l,\beta,cnst)}{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)}},\quad \varepsilon\in[b,a] \qquad (17.1.a)$$

$$\Delta\Phi_2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst,co)=-\pi+\arcsin\sqrt{\frac{F(a,\varepsilon_l,\beta,cnst)}{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)}},\quad \varepsilon\in[b,a] \qquad (17.1.в)$$

$\boldsymbol{2\beta^2<b}$ тохиолд

$$\Delta\Phi_1(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst,co)=-\pi+\arcsin\sqrt{\frac{F(b,\varepsilon_l,\beta,cnst)}{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)}},\quad \varepsilon\in[b,a] \qquad (17.2.a)$$

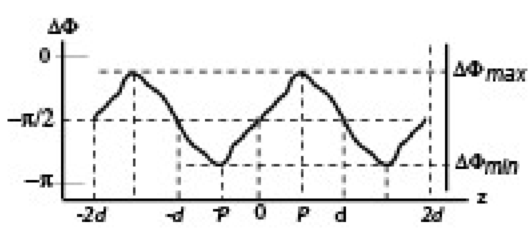
$$\Delta\Phi_2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst,co)=-\pi+\arcsin\sqrt{\frac{F(a,\varepsilon_l,\beta,cnst)}{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)}},\quad \varepsilon\in[b,a] \qquad (17.2.в)$$

Аль ч тохиолд

$$\Delta\Phi_{\max}=\Delta\Phi_1(\xi,...),\quad \Delta\Phi_{\min}=\Delta\Phi_2(\xi,...),\ \xi\in[b,a] \qquad (18)$$

Үүнд $\boldsymbol{\xi}-$ бол $\boldsymbol{F(\varepsilon,...)}$ фукцийн максиумын цэг.

Фазын зөрүү $\boldsymbol{\varepsilon}$ ээр илэрхийлэгдэхийн чацуу $\boldsymbol{\varepsilon}$ өөрөө $z-$координатаар улиран хувьсах тул фазын зөрүү бас $z-$координатаар улиран хувьсдаг функц бүлгээ. $\boldsymbol{\Delta\Phi(z)}$ функцийн бүдүүвч графикийг 3 -р зурагт үзүүлэв .



3-р зураг. $\boldsymbol{\Delta\Phi(z)}$ функцийн бүдүүвч график($\boldsymbol{a<2\beta^2}$ тохиол). $\boldsymbol{\Delta\Phi(z)}$ бол $z-$тэнхлэг дагуу, улиран хувьсдаг функц, улирал нь 2 $\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{d}$ нь (15), $\boldsymbol{p}$ нь (16) томъёогоор тус тус бодогдоно) $z-$координатын эхийг($z=0$ -г) 1-р зурагд үзүүлсэн графиктай нийцүүлэн авчээ.

<u>Оронгийн соронзон компонентийн фаз</u>

Оронгийн соронзон ба цахилгаан компонентийн фазын зөрүүг сая дэлгэрэнгүй авч үзэв. Зөрүү $z-$тэнхлэг дагуу улиран хувьсдаг болохлоор нь компонент тус бүр бас $z-$тэнхлэг дагуу улиран хувьсдаг болов уу гэж бодмоор, гэтэл тийм биш ажээ. (5) тэгшитгэлийн баруун тал эерэг хэмжигдүүн, тэгэхлээр $\boldsymbol{\Phi_e(z)}$ фаз $z-$дагуу монотонно өсөх (дэлгэгдэх) хэмжигдүүн байх болж байгаа юм. $z-$координат дагуудаа $2\boldsymbol{d}$-хэмжээгээр өөрчлөгдөх бүр $\boldsymbol{\Phi_e(z)}$ функц тогтмол $\delta\Phi$ хэмжээгээр нэмэгдэнэ.

$$\Phi_e(z+d)=\Phi_e(z)+\delta\Phi$$

үүнд

$$\delta\Phi_e=2\int_b^a\frac{2\varepsilon}{h^2}co\frac{0.5\varepsilon+e^2}{|2\beta^2-\varepsilon|\sqrt{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)-4co^2}}d\varepsilon \tag{19}$$

Блохын долгионы “вектор” тодорхойлъё:

$$K=\frac{\delta\Phi_e}{2d} \tag{20}$$

Фазаас Kz хэмжээгээр суутгаж богиносгоё.

$$\psi_e(z)=\Phi_e(z)-Kz \tag{21}$$

Богиносгосон фаз бол $2\boldsymbol{d}$ улирал бүхий улирах функц мөн: $\psi_e(z+n2d)=\psi_e(z), n-$ дурын бүхэл тоо.

$$\Phi_e(z)=\psi_e(z)+Kz \tag{22}$$

Соронзон компонентийн фаз 2 хэсгээс тогтоно. Үүнд

- $z-$ тэнхлэг дагуу улиран хувьсдаг хэсэг(богиносгосон фаз),
- $z-$ тэнхлэг дагуу дэлгэгдэх хэсэг(Блохын фаз).

Ийнхүү оронгийн соронзон компонент нь $z-$тэнхлэг дагуу(орчны гүн тийш) Блох долгио хэлбэртэй тарах аж.

Одоо улиран хувьсдаг хэсэг $\psi_e(z)$ *-г тусад нь авч үзье.Түүнийг* $[-d,d]$ мужид дараах байдлаар тодорхойлъё.

$z\in[-d,0]$ байхад

$$\begin{aligned}\Phi_e-\Phi_e(0)&=\int_\varepsilon^b\frac{2\varepsilon}{h^2}co\frac{0.5\varepsilon+e^2}{|2\beta^2-\varepsilon|\sqrt{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)-4co^2}}d\varepsilon=\\&=-\int_b^\varepsilon\frac{2\varepsilon}{h^2}co\frac{0.5\varepsilon+e^2}{|2\beta^2-\varepsilon|\sqrt{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)-4co^2}}d\varepsilon\end{aligned} \tag{23а}$$

$z\in[0,d]$ байхад

$$\Phi_e-\Phi_e(0)=\int_b^\varepsilon\frac{2\varepsilon}{h^2}co\frac{0.5\varepsilon+e^2}{|2\beta^2-\varepsilon|\sqrt{F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst)-4co^2}}d\varepsilon \tag{23б}$$

$\Phi_e-\Phi_e(0)$ ялгавар, $\varepsilon-$ээр, $[-d,d]$ мужид сондгой функц юм.

(14), (23) хамтдаа $\Phi_e-\Phi_e(b)$ -фаз $z-$ координатаас хамаарах хамаарлын параметр тэгшитгэл юм.

Оронгийн соронзон компонентийн Блох долгио

$$h_y(z)=-\sqrt{h^2(\varepsilon(z))}\exp(i\psi_e+iKz) \tag{24}$$

<u>Оронгийн цахилгаан компонентийн фаз</u>

Цахилгаан компонентийн фаз нь соронзон компонентийн $\Phi_e(z)$- фаз ба фазын $\Delta\Phi(z)$-зөрүүгээр илэрхийлэгдэнэ.

$$\Phi_A(z)=\Phi_e(z)-\Delta\Phi(z)$$

(22) –г орлуулсны дараа

$$\Phi_A(z)=\psi_A(z)+Kz \tag{25}$$

гэж бичигдэнэ. Үүнд

- $\psi_A(z)=\psi_e(z)-\Delta\Phi(z)$-богингосгосон фаз(улиран хувьсдаг хэсэг),
- Kz дэлгэгддэг хэсэг(Блохын фаз). (26)

Ийнхүү цахилгаан компонент нь $z-$ тэнхлэг дагуу(орчны гүн тийш)

Блох долгио хэлбэртэй тарна.Соронзон ба цахилгаан компонентын Блохын фаз ижил ажээ.

Цахилгаан компонентын Блох долгио

$$A(z) = \sqrt{A^2(\varepsilon(z))}\exp(i\psi_A(z) + iKz) \qquad (27)$$

Блох долгио $z-$ тэнхлэг дагуу чиглэсэн энергийн урсгал байгаа($co \neq 0$) тохиолд үүснэ.

II Диэлектрикийн функц координатаас хамаарах хамаарлыг тусгай функцээр илэрхийлэх

Эхлээд(14) интеграл тусгай ба элементар функцээр илэрхийлэгдэх параметруудын мужийг хэрхэн олсон арга зүйг танилцуулъя[1].

β^2 параметрийн

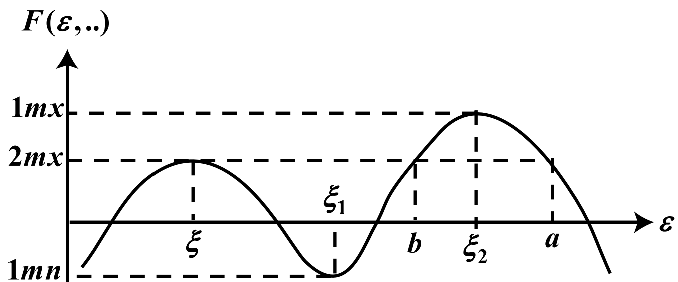
$$\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2$$

нөхцөл хангах утга бүрд $\beta^2 cnst$ параметрийн зохих мужид ингеграл авагдах боломж гардаг юм.

$F(\varepsilon,..) = F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta))$ функцийн бүдүүвч график

$F(\varepsilon,..)$ *бол хоёр полюстай, ерөнхийдээ таван min,max бүхий функц мөн.*

4 зурагд $\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2$ *тохиолд* $\varepsilon = 0,\quad \varepsilon = 2\beta^2$ -хоёр полюсийн хоорондох хэсэг дүрслэгджээ.



$\varepsilon = \xi_1$ *бол нэгдүгээр төрлийн миниумын цэг.* $\varepsilon = \xi_2$ *бол 1-р төрлийн максиумын цэг. 2-р төрлийн максиумын* $\varepsilon = \xi$ *цэг дээрх* $F(\varepsilon,..)$ *функцийн утгыг* $2mx$ *- ээр, нэгдүгээр төрлийн миниум,максиумын цэг* ξ_1, ξ_2 *дээрх* $F(\varepsilon,..)$ *функцийн утгуудыг* $1mn,\ 1mx$ *гэж тэмдэглэжээ. Зурагт*

$$0 \le 2mx < 1mx \qquad (28)$$

тохиол дүрслэгджээ.

$$2mx = F(\xi,\varepsilon_l,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta)) = (2\varepsilon_l - 3\xi)\xi^3 / 4\beta^2 \qquad (29)$$

$$1mn = F(\xi_1,\varepsilon_l,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta)) = (\xi_1 - \beta^2)(\xi_1 - \varepsilon_l)^2 \qquad (30)$$

$$1mx = F(\xi_2,\varepsilon_l,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta)) = (\xi_2 - \beta^2)(\xi_2 - \varepsilon_l)^2 \qquad (31)$$

Хэрвээ ξ -ийн аль нэг утгад ,зурагт үзүүлсэн шиг, (28) нөхцөл бүрдсэн тохиолд $4co^2$ - параметрийн утгыг $2mx$ -тэй тэнцүүгээр авах юм бол (14) интегралын интеграндад хуваарьт язгуур дор $\varepsilon = \xi$ цэг дээр хоёр дугаар эрэмбийн тэг үүсч $[b,a]$ - тодорхойлолтын-муж дээр интеграл авагдах боломж бий болно.

$\beta^2 > \frac{8}{9}\varepsilon_l$ нөхцөлд β^2 -ийн өгөгдсөн утга бүрт (28) тэнцэл биш биелдэг ξ параметрийн бүхэл муж бий.

Интеграл авагдах ξ муж

(28) нөхцөл биелэх ξ - ийн утгуудыг олж тогтоох зорилт тавья.

2-р төрлийн максиумын цэг ξ ийн утгыг өгөхөд түүнд харгалзах $cnst$ -ийн утга тодорхой болно.

$$cnst = cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta) = -\varepsilon_l^2 + 3\xi^2 - (1/\beta^2)\xi^3 \qquad (32)$$

$cnst$ - ийн энэхүү утгад харгалзах 1-р төрлийн миниум максиумын цэгүүд

$$\xi_1 = \frac{2\beta^2 + \varepsilon_l}{3} - \sqrt{\frac{1}{3}cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta) + \frac{4}{9}(\varepsilon_l - \beta^2)^2} \qquad (33)$$

$$\xi_2 = \frac{2\beta^2 + \varepsilon_l}{3} + \sqrt{\frac{1}{3}cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta) + \frac{4}{9}(\varepsilon_l - \beta^2)^2} \qquad (34)$$

2-р төрлийн максиумын өндөр:

$$2mx(\xi) \equiv F(\xi, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = (2\varepsilon_l - 3\xi)\xi^3 / 4\beta^2 \qquad (35)$$

1-р төрлийн максиумын өндөр:

$$1mx(\xi) = F(\xi_2, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = (\xi_2 - \beta^2)(\xi_2 - \varepsilon_l)^2 \qquad (36)$$

Үүнд ξ_2 нь ,(34) томъёо ёсоор, ξ -ээс хамаарна.

Энэ хоёр илэрхийллийг ашиглан

$$0 \le 2mx(\xi) < 1mx(\xi) \qquad (37)$$

тэнцэл бишийг β^2 -ийн өгөгдсөн утга бүрд ξ - ийн утгаас хамааруулан шинжилж зөхөх юмгүй.

$$2mx(\xi) = 1mx(\xi) \qquad (38)$$

тэгшитгэлийн язгуурыг ξ_e -ээр тэмдэглэе. ξ_e нь β^2 -ийн утгаар тодорхойлогдох тул ,хэрэгтэй газар, тодотгож $\xi_e(\beta^2)$ гэж бичих нь зүйтэй юм. (37) тэнцэл бишийн биелэх (β^2, ξ) цэгүүлийн муж гэвэл

- $\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2 < 2\varepsilon_l, \quad \xi_l(\beta^2) < \xi < \frac{2}{3}\varepsilon_l$ $\qquad$ ***МУЖ – 1***
- $2\varepsilon_l \le \beta^2, \quad \varepsilon_l < \xi < \frac{2}{3}\varepsilon_l$ $\qquad$ ***МУЖ – 2***

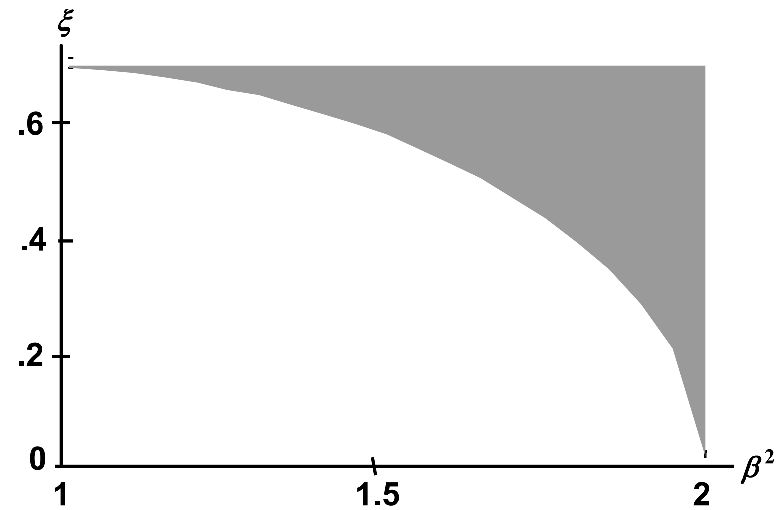
Эдгээр мужийн аль ч (β^2, ξ) цэг дээр $4co^2$ -г $2mx(\xi)$ тэй тэнцүүгээр авбал (14) интеграл тусгай функцээр илэрхийлэгдэх болно. $\xi_e(\beta^2)$ -г тодорхойлъё гэвэл, жишээ нь, mathcad программ хэрэглэж байгаа бол язгуур олдог функц дуудаж

$$\begin{cases} \xi = \frac{2}{3}\varepsilon_l, \quad (\textit{guess value}) \\ \xi_e = root(1mx(\xi) - 2mx(\xi), \xi) \end{cases} \qquad (39)$$

гэж олж болно. ξ_e -г олох өөр нэг аргыг хавсралтаас үзнэ үү.

5-р зурагт муж-1 ийн ихэнх хэсгийг үзүүлэв.

Хэрвээ $\beta^2 \ge 2\varepsilon_l$ бол $\xi \in (0, \frac{2}{3}\varepsilon_l]$ бүрд интеграл авагдана.



5–р зураг. $\boldsymbol{\varepsilon_l = 1,\ 1 \le \beta^2 \le 2.}$ $\boldsymbol{\varepsilon = \xi}$ *бол хоёр дугаар төрлийн максиумын цэг. Сүүдэртүүлсэн муруй шугаман гурвалжны, муруй гипотенуз нь* $\boldsymbol{\xi = \xi_e(\beta^2)}$*- муруй болой. Гурвалжны, гипотенузын цэгүүдээс бусад, аль ч цэг дээр интеграл ,* $\boldsymbol{4co^2 = 2mx(\xi)}$ *байх тохиолд, тусгай функцээр илэрхийлэгдэнэ. Энд* $\boldsymbol{\xi}$ *ийн утга дээрээсээ* $\boldsymbol{\frac{2}{3}\varepsilon_l}$ *ээр хязгаарлагдсан байна.* $\boldsymbol{\xi = \xi_e(\beta^2)}$ *- муруйн цэг бүр дээр* $\boldsymbol{0 \le 2mx(\xi) = 1mx(\xi)}$*. Эдгээр цэг бүр нь хавтгай долгионд харгалзана.*

Интеграл хэрхэн авсан бэ гэвэл. Орлуулга: $\boldsymbol{\varepsilon = \xi + x}$, $\boldsymbol{\xi}$ нь 2-р төрлийн максимумын цэг байг. $\boldsymbol{4co^2 = 2mx(\xi)}$ гэж авахад

$$F(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta)) - 4co^2 = \frac{xypm\text{в}\text{э}p}{4(2\beta^2-\varepsilon)^2} \tag{40}$$

$$xypm\text{в}\text{э}p = x^2(A_2 + A_3x + A_4x^2 + A_5x^3) = x^2\varphi(x), \tag{41}$$

$$\varphi(x) = A_2 + A_3x + A_4x^2 + A_5x^3 \tag{42}$$

Үүнд

$$A_2 = -\frac{3}{\beta^2}\xi^4 + (12\beta^2 + 6\varepsilon_l)\xi^2 - 12\xi\varepsilon_l\beta^2$$

$$A_3 = -\frac{2}{\beta^2}\xi^3 - 14\xi^2 + (8\varepsilon_l + 12\beta^2)\xi - 4\varepsilon_l\beta^2$$

$$A_4 = -10\xi + 2\varepsilon_l + 3\beta^2$$

$$A_5 = -2$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + e^2(\varepsilon,\varepsilon_l,\beta,cnst(\xi,\varepsilon_l,\beta)) = \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{B_1}{\varepsilon} + \frac{B_2}{2\beta^2-\varepsilon}\right) \tag{43}$$

Үүнд

$$B_1 = \frac{(3\beta^2-\xi)\xi}{2\beta^2}, \quad B_2 = \frac{(3\beta^2-\xi)(\xi+2\beta^2) - 4\beta^4}{2\beta^2} \tag{44}$$

$\boldsymbol{\beta^2}$ -ийн $\boldsymbol{[\varepsilon_l, 2\varepsilon_l)}$ муж дээрх утга бүрд $\boldsymbol{\xi \in [\varepsilon_e(\beta^2), \frac{2}{3}\varepsilon_l]}$ байхад,эсвэл $\boldsymbol{\beta^2}$ -ийн $\boldsymbol{\beta^2 \ge 2\varepsilon_l}$ муж дээрх утга бүрд $\boldsymbol{\xi \in [0, \frac{2}{3}\varepsilon_l]}$ байхад (14) интеграл

$$z - z(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_b^{\varepsilon} (1 + \frac{B_1}{\varepsilon} + \frac{B_2}{2\beta^2 - \varepsilon}) \frac{1}{\sqrt{(\tilde{a} - x)(x - \tilde{b})(x - \tilde{c})}} d\varepsilon, \quad x = \varepsilon - \xi \tag{45}$$

хэлбэрт орно. Үүнд $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ бол $\varphi(x)$ (42-р томъёо) куб дөрвөн гишүүнтийн дараалсан гурван язгуурууд, $\tilde{c} < \tilde{b} < \tilde{a}$. Язгууруудыг хавсралтын эцэст бичсэн байгаа($(X3) - (X6)$). Харин

$$b = \tilde{b} + \xi, a = \tilde{a} + \xi, c = \tilde{c} + \xi. \quad \xi \in [b, a]$$

Интегралын таблиц [3] -оос харахад үүнийг тусгай функцээр илэрхийлж болох ажээ:

$$z - z(b) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} \{ \frac{B_1}{(\tilde{c} + \xi)(\tilde{b} + \xi)} [(\tilde{c} - \tilde{b}) \Pi(\chi, p^2 \frac{\tilde{c} + \xi}{-\tilde{b} - \xi}, p) + (\tilde{b} + \xi) F(\chi, p)] -$$
$$- \frac{B_2}{(\tilde{c} - 2\beta^2 + \xi)(\tilde{b} - 2\beta^2 + \xi)} [(\tilde{c} - \tilde{b}) \Pi(\chi, p^2 \frac{\tilde{c} - 2\beta^2 + \xi}{-\tilde{b} + 2\beta^2 - \xi}, p) +$$
$$+ (\tilde{b} - 2\beta^2 + \xi) F(\chi, p)] + F(\chi, p) \} \tag{46}$$

Үүнд, $F(\chi, p)$-нэгдүгээр төрлийн эллипслэг интеграл, $\Pi(\varphi, n, k)$-гуравдугаар төрлийн эллипслэг интеграл, B_1, B_2-нь (44) томъёогоор тодорхойлогдоно.

$$\chi = \arcsin \sqrt{\frac{(\tilde{a} - \tilde{c})(\varepsilon - \xi - \tilde{b})}{(\tilde{a} - \tilde{b})(\varepsilon - \xi - \tilde{c})}}, \quad p = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}} \tag{47}$$

(46)-д орж буй эллипслэг интегралууд нь $\tilde{b} \le x \le \tilde{a}$ буюу $\tilde{b} + \xi \le \varepsilon \le \tilde{a} + \xi$ мужид сингуляр цэггүй. (46) функцийг хөрвүүлэхэд $0 \le z - z(b) \le d$ мужид $\varepsilon(z - z(b))$ функц гарна. $\varepsilon(z - z(b))$-функц тэгш хэмт шинжтэй улиран хувьсдаг функц тул түүнийг зөвхөн $0 \le z - z(b) \le d$ мужид тодорхойлох нь хангалттай(I хэсгээс үзнэ үү).

III фазын интеграл

Одоо фазын интеграл (23а)–г авч үзье. Φ_e, Φ_A фазуудын ерөнхий шинж болон ерөнхий тодорхойлолтыг I хэсгээс үзнэ үү. $\Phi_e(\varepsilon)$-фазын функцийг ε-ийн зөвхөн $[b, a]$ сегмент дээр бодож тодорхойлох явдал бол Φ_e, Φ_A фазуудын тооцооны гол зүйл билээ.

(23а) интегралын интегранд дахь

$$\frac{\varepsilon}{h^2}(\frac{\varepsilon}{2} + e^2) \tag{Q1}$$

Илэрхийллийг авч үзье. $h^2 = \frac{\varepsilon^2}{\beta^2} e^2$-г ашиглан үүнийг

$$\frac{\varepsilon}{h^2}(\frac{\varepsilon}{2} + e^2) = \frac{\beta^2}{\varepsilon} \frac{0.5\varepsilon + e^2}{(0.5\varepsilon + e^2) - 0.5\varepsilon} \tag{Q2}$$

гэж бичээд $0.5\varepsilon + e^2$ ийн оронд (43) –г орлуулсны дараа (44)" –г тооцвоос энэ нь

$$\frac{x}{\varepsilon} \frac{-\varepsilon^2 + \varepsilon(3\beta^2 - \xi) + \xi(3\beta^2 - \xi)}{\beta^2 \varepsilon^2 - \xi^2 (3\beta^2 - \xi)} \tag{Q3}$$

хэлбэрт орно. Хуваарийг $\beta^2(\varepsilon^2 - r^2)$ хэлбэртэй бичье.Үүнд

$$r^2 = \frac{\xi^2}{\beta^2}(3\beta^2 - \xi) \tag{48}$$

(14) интеграл тусгай функцээр авагддаг бүх хувилбарыг нэг бүрчлэн шинжилж үзэхэд аль ч хувилбарт $3\beta^2 - \xi > 0$ тэнцэл биш биелдэг нь мэдэгдэнэ. Сонирхолтой нь гэвэл (48) нь

$$cnst = cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta) = -\varepsilon_l^{\,2} + 3\xi^2 - (1/\beta^2)\xi^3 \qquad (49)$$

томъёоны улмаас

$$r^2 = \varepsilon_l^2 + cnst \qquad (50)$$

гэсэн авсаархан хэлбэрт орно. Үүнийг ашиглан (14) интеграл тусгай функцээр авагддаг бүх хувилбарыг нэг бүрчлэн шинжилж үзэхэд $\varepsilon = r$ цэг тодорхойлолтын мужид ордоггүй нь мэдэгдэнэ.Харин зарим тохиолд Ah сегментийн үзүүрийн цэгтэй давхцах явдал бий. Сегментийн үзүүр зөвхөн босоо долгионд$(co = 0)$ тодорхойлолтын мужид орно. Босоо долгионы фазыг бид тусгайд нь авч үзнэ.

(Q3)-г энгийн рационал бутархайнууд болгон задалбаас

$$x\{\frac{c}{\varepsilon} + \frac{c_-}{\varepsilon - r} + \frac{c_+}{\varepsilon + r}\} \qquad (Q4)$$

Үүнд

$$c = \frac{\xi(3\beta^2 - \xi)}{-r^2}, c_- = -\frac{1}{2} + \frac{(\xi + r)(3\beta^2 - \xi)}{2r^2}, c_+ = -\frac{1}{2} + \frac{(\xi - r)(3\beta^2 - \xi)}{2r^2} \qquad (51)$$

Эцэст фазын интеграл:

$$\Phi_e(\varepsilon) - \Phi_e(b) = \sqrt{2}co\int_b^\varepsilon \{\frac{c}{\varepsilon} + \frac{c_-}{\varepsilon - r} + \frac{c_+}{\varepsilon + r}\}\bullet$$
$$\bullet\frac{d\varepsilon}{\sqrt{(\tilde{a} - x)(x - \tilde{b})(x - \tilde{c})}}, \quad x = \varepsilon - \xi, \quad b = \tilde{b} + \xi \qquad (52)$$

Үүнд $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ бол $\varphi(x)$ (42-р томъёо) куб дөрвөн гишүүнтийн дараалсан гурван язгуурууд, $\tilde{c} < \tilde{b} < \tilde{a}$. Утгуудыг хавсралтын эцэст бичсэн байгаа($(X3) - (X6)$). Интегранд дахь полюсын цэг: $x = r - \xi$ нь Блох долгионд($co \neq 0$) $\tilde{b}$ утгатай давхцахгүй.

$$b = \tilde{b} + \xi, a = \tilde{a} + \xi, c = \tilde{c} + \xi. \quad \xi \in [b, a]$$

Интегралын таблиц [3] -оос харахад үүнийг тусгай функцээр илэрхийлж болох ажээ:

$$\Phi_e(z - z(b)) = 2^{3/2}co(I + II + III)$$

Үүнд

$$I = \frac{c}{(\tilde{c} + \xi)(\tilde{b} + \xi)\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}[(\tilde{c} - \tilde{b})\Pi(\chi, p^2\frac{\tilde{c} + \xi}{-\xi - \tilde{b}}, p) + (\tilde{b} + \xi)F(\chi, p)]$$

$$II = \frac{c_-}{(\tilde{c} - r + \xi)(\tilde{b} - r + \xi)\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}[(\tilde{c} - \tilde{b})\Pi(\chi, p^2\frac{\tilde{c} - r + \xi}{r - \xi - \tilde{b}}, p) + (\tilde{b} - r + \xi)F(\chi, p)]$$

$$III = \frac{c_+}{(\tilde{c} + r + \xi)(\tilde{b} + r + \xi)\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}[(\tilde{c} - \tilde{b})\Pi(\chi, p^2\frac{\tilde{c} + r + \xi}{-r - \xi - \tilde{b}}, p) + (\tilde{b} + r + \xi)F(\chi, p)]$$

Энд r -г (48) аас, c, c_-, c_+ -г (51) ээс, $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ -г $(X3) - (X6)$) аас үзнэ үү

Дүгнэлт

Өөрөө цуглуулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар тм долгионы оронд диэлектрикийн функц координатаас хамаарах хамаарлыг тусгай функцээр илэрхийлж болдог сул параметруудын 2-хэмжээст муж бий. Яг тэр мужид фазын интеграл бас авагддаг ажээ. Томъёо гаргав

Резюме

Имеется 2-мерная область свободных параметров ,где зависимость диэлектрической функции от координаты, в задаче распространения световых ТМ волн в самофокусирующей керр среде, может быть получена в виде комбинации специальных функций. Оказывается что, в той же области свободных параметров, фазовый интеграл берется.

Выведены формулы.

Ссылки

[1]. Г. Очирбат, О. Нямсүрэн, Өөрөө цуглуулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар тм долгионы диэлектрикийн функц тусгай функцээр илэрхийлэгдэх нь. МУИС ЭШБ 282(16) 2006 Улаанбаатар,

[2]. О. Нямсүрэн, Г. Очирбат, Өөрөө цуглуулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар соронзон долгионы фаз ба амплитудын нэгдсэн шинжилгээ, тооцох аргачлал. Блох долгио. МУИС ЭШБ ийн энэ дугаарт

[3]. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, 1963, ФМ, Москва.

ХАВСРАЛТ

I. $\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2 < 2\varepsilon_l$

Нэгдүгээр ба хоёрдугаар төрлийн максиумын өндөр хоорондоо тэнцэх ξ -ийн утга ξ_e -г ,жишээлбэл, mathcad хэрэглэж байгаа бол :

$$\begin{cases} \xi = \frac{2}{3}\varepsilon_l, \quad (\textit{guess value}) \\ \xi_e = root(1mx(\xi) - 2mx(\xi), \xi) \end{cases} \qquad (X1)$$

гэж олж болно.

$2mx(\xi) = 1mx(\xi)$ тохиолд, нөгөө талаас, $\varphi(x)$ -куб илэрхийллийн хоёр язгуур давхцах ёстой тул $\xi = \xi_e$ -д $\varphi(x) = 0$ тэгшитгэлийн дискриминант тэг болж таараа.

Тэмдэглэл:

$$ck(\xi) = -0.5(-\frac{3}{\beta^2}\xi^4 + (12\beta^2 + 6\varepsilon_l)\xi^2 - 12\xi\varepsilon_l\beta^2)$$

$$bk(\xi) = -0.5(-\frac{2}{\beta^2}\xi^3 - 14\xi^2 + (8\varepsilon_l + 12\beta^2)\xi - 4\varepsilon_l\beta^2)$$

$$ak(\xi) = -0.5(-10\xi + 2\varepsilon_l + 3\beta^2)$$

$$p(\xi) = -\frac{ak(\xi)}{3} + bk(\xi), \quad q(\xi) = \left(\frac{ak(\xi)}{3}\right)^3 - ak(\xi)\frac{bk(\xi)}{3} + ck(\xi)$$

$$s(\xi) = arc\cos\left(\frac{-q(\xi)}{2\sqrt{-(p(\xi)/3)^3}}\right),$$

$$\textit{дискриминант}: \; Q(\xi) = \left(\frac{p(\xi)}{3}\right)^3 + \left(\frac{q(\xi)}{2}\right)^2$$

mathcad: $$\begin{cases} \xi = \frac{2}{3}\varepsilon_l, \quad (\textit{guess value}) \\ \xi_e = root(Q(\xi), \xi) \end{cases} \qquad (X2)$$

$\xi \in (\xi_e, \frac{2}{3}\varepsilon_l]$ бүрд $\varphi(x)$ -ийн язгуурууд:

$$x1(\xi) = \frac{-ak(\xi)}{3} - 2\sqrt{-p(\xi)/3}\cos(\frac{s(\xi)}{3} - \frac{\pi}{3}) \qquad (X3)$$

$$x2(\xi) = \frac{-ak(\xi)}{3} - 2\sqrt{-p(\xi)/3}\cos(\frac{s(\xi)}{3} + \frac{\pi}{3}) \qquad (X4)$$

$$x3(\xi) = \frac{ak(\xi)}{3} + 2\sqrt{-p(\xi)/3}\cos(\frac{s(\xi)}{3}) \quad \text{(X5)}$$

Тэхдээ

$$\tilde{c} = x1(\xi), \quad \tilde{b} = x2(\xi), \quad \tilde{a} = x3(\xi) \quad \text{((X6))}$$

II. $2\varepsilon_l \leq \beta^2$. Аль ч $\xi \in [0, \frac{2}{3}\varepsilon_l]$-д (14) (23) интегралууд $4co^2 = 2mx(\xi)$ ((35) томъёо) тохиолд (46) ,(53) томъёогоор тодорхойлогдоно.