

Монголын Оюутны Математикийн Олимпиад 2019

Нэгийн даваа

1-р курс

1. $m \geq 2$ багана, $n \geq 2$ мөртэй тэгш өнцөгт торны зангилааны цэгүүдээс аль ч гурав нь тэгш өнцөгт гурвалжны орой болохгүйгээр хамгийн ихдээ хэдийг сонгож болох вэ?
2. $(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-7)(x-8) = (x-3)(x-6)(x-9)$ тэгшитгэл 6-н ширхэг ялгаатай $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ гэсэн язгууруудтай бол

$$\sum_{i=1}^6 (r_i - 1)(r_i - 2)(r_i - 4)$$

нийлбэрийг ол.

3. I нь 2×2 хэмжээтэй нэгж матриц ба A, B, C нь 2×2 хэмжээтэй бодит тоон матрицууд байг.

$$M = \begin{pmatrix} I & A \\ B & C \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} I & B \\ A & C \end{pmatrix}$$

M урвуутай бол N урвуутай гэдэг үнэн үү?

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 30x}{(1+29^x)\sin x} dx$ бод.

Бодлого бүр 7 оноотой, бодох хугацаа 3 цаг.

Монголын Оюутны Математикийн Олимпиад 2019
Нэгийн даваа
2-р курс

1. 1 радиустай дугуйд багтсан гурвалжны талууд a, b, c бол

$$a^2 + b^2 + c^2$$

-ийн хамгийн их утгыг ол.

2. Хавтгай дээрх төгсгөлөг тооны цэгийн заримыг нь улаан, үлдсэнийг нь хөхөөр будав. Хавтгайг нэг шулуунаар аль ч хэсэг нь улаан, хөх цэгүүдийн талаас ихгүйг агуулсан байхаар хоёр хэсэгт хувааж болохыг батал [Шулуун дээрх будагдсан цэг хавтгайн аль ч хэсэгт орохгүй].

3. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ба $xy > 1$ байх x, y эерэг тооны хувьд

$$f(x^2) + f(y^2) = f\left(\frac{x^2y^2 - 2xy + 1}{x^2 + 2xy + y^2}\right)$$

байх функц байг. Хэрэв $f(0) = 2019, f(1) = \frac{2019}{2}$ бол $f(3)$ -ийг ол.

4. $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1, n \geq 1$ байг. $f(x) = g(h(x))$ байдаг бодит коэффициенттэй $g(x), h(x)$ олон гишүүнтүүд олддог байх n тоог ол.

Бодлого бүр 7 оноотой, бодох хугацаа 3 цаг.

Монголын Оюутны Математикийн Олимпиад 2019

Нэгийн даваа

3-4-р курс

1. $P_2 = \{f(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ вектор огторгуй ба $B(f) = (a + b)x^2 + (a + 2c)x + (3a + b + 4c)$ шугаман хувиргалт байг. Тэгвэл B -ийн цөм болон дүрийн огторгуйг олж хэмжээсүүдийг тогтоо.

2. Гүдгэр n -өнцөгт гүдгэр m -өнцөгттэй огтлолцов. Эсвэл аль нэг орой нөгөө олон өнцөгтөд байрлана, эсвэл дор хаяж $n + m - 6$ ширхэг диагональ нөгөө дүрсээ огтолно гэж батал.

3. Комплекс коэффициенттэй

$$P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$$

олон гишүүнтийн бүх язгуур цэвэр хуурмаг тоонууд юм. Тэгвэл $\forall x \in \mathbb{R}$ хувьд

$$\left| \frac{2xP'(x)}{P(x)} - n \right| \leq n$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

4. $\alpha \in \mathbb{C}$ нь 2-р эрэмбийн алгебрийн бүхэл тоо (бүхэл коэффициенттэй квадрат тэгшитгэлийн шийд) байг.

P нь $\mathbb{Z}[\alpha]$ цагирагийн үл задрах элементүүдийн олонлог бол $\sum_{p \in P} \frac{1}{|p|^2} = \infty$ гэж батал.

Бодлого бүр 7 оноотой, бодох хугацаа 3 цаг.