

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2018

1-ийн даваа, 1-р курс

Бодох хугацаа: 120 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр

Сургууль, анги

1. $f(x) = |\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x|$ функцийн $[0; 2\pi]$ завсар дээрх хамгийн бага утгыг ол.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ байг.

$$f(x) = \int_0^1 x(1+xy)f(y)dy + \sqrt{x}$$

байх бүх $f(x)$ функцийг ол.

3. $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, -1)$, $D(1, -1)$ цэгүүд өгөгдөв. $|AP| \cdot |CP| = |BP| \cdot |DP|$ байх P цэгүүдийн олонлогийг ол.

4. i нь хуурмаг нэгж, $A = \begin{pmatrix} 2018 & 2017i \\ -2017i & 2018 \end{pmatrix}$ бол A^{2018} ол.

5. $T_n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$ бол T_n -г ол.

1-ийн даваа, 2-р курс

Бодох хугацаа: 120 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр

Сургууль, анги

1. $y = f(x)$ функц $[0, 1]$ завсарт 2 удаа дифференциалчлагддаг бөгөөд $f(0) = f(1) = 1$, $f(x) \geq 0$ байг. Хэрэв $[0, 1]$ завсараас $f(x_0) = 0$ байх x_0 цэг олддог бол $f''(x) \geq 8$ байх x цэг $[0, 1]$ завсараас олдох уу?

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсийг багтаасан квадратын талуудын тэгшитгэлийг бич.

3. $\epsilon_i^3 = 1$, $\epsilon_i \neq 1$ ($i = 1, 2$) байг.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

бол $A = PBP^{-1}$ байх P матриц олохыг батал.

4. T_a нь $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$ цэгүүдэд оройтой гурвалжны дотоод муж бол

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^4 \cdot e^{-a^3} \int_{T_a} e^{x^3+y^3} dx dy$$

бод.

1-ийн даваа. 3,4-р курс

Бодох хугацаа: 120 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр

Сургууль, анги

1. $m \in \mathbb{N}$ тооны хувьд $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m$ гэе.

A_m матрицын 1-р мөрний элементүүдийн нийлбэрийн хамгийн их утгыг ол.

2. $P(x)$ нь бүхэл коэффициенттэй 4 зэргийн олон гишүүнт ба язгуурууд нь r_1, r_2, r_3, r_4 байг.

Хэрэв $r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$ ба $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$ бол

$$r_1 \cdot r_2 \in \mathbb{Q}$$

батал.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсийг багтаасан квадратын талуудын тэгшитгэлийг бич.

4. $a > 0$ байг. a_n дараалалыг

$$a_1 = a, \quad a_2 = a^2, \quad a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot a_{n-i} \quad (n \geq 3)$$

гэж тодорхойлбол

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

ол.