Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

1-ийн даваа, 1-р курс

Бодох хугацаа: 180 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр ....

Сургууль, анги ....

1. $\sqrt[3]{\cos x} < \dfrac{\sin x}{x} \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ тэнцэтгэл бишийг батал.

2. 3 хавтгайн тэгшитгэлээр үүсэх шугаман тэгшитгэлийн системийн үндсэн матрицын ранг r, өргөтгөсөн матрицын ранг R бол өгсөн хавтгайнуудыг шүргэх бөмбөрцөгийн төвийн геометрийн байрыг ол. Үүнд: a) $r = 2, R = 3$ b) $r = 1, R = 2$

3. p тогтмол тоо үед $x^3 - 3x - p = 0$ куб тэгшитгэлийн бодит язгууруудын хамгийн их болон хамгийн бага утгуудын үржвэрийг $f(p)$ гэе. (Нэг бодит язгууртай бол түүний квадрат нь $f(p)$ болно.) Тэгвэл: a) $\forall p \in \mathbb{R}$-ийн хувьд $f(p)$-ийн минимум утгыг ол. b) $f(p)$ функцийн графикийг байгуул.

4. Гүдгэр 4 өнцөгтийн талууд дээр тухайн талыг диаметрээ болгосон дугуй байгуулъя. Эдгээр 4 дугуйнаас хоорондоо үл огтлолцох хос хамгийн ихдээ 1 олдохыг батал.

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

1-ийн даваа, 1-р курс

Бодох хугацаа: 180 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр ....

Сургууль, анги ....

1. $\sqrt[3]{\cos x} < \dfrac{\sin x}{x} \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ тэнцэтгэл бишийг батал.

2. 3 хавтгайн тэгшитгэлээр үүсэх шугаман тэгшитгэлийн системийн үндсэн матрицын ранг r, өргөтгөсөн матрицын ранг R бол өгсөн хавтгайнуудыг шүргэх бөмбөрцөгийн төвийн геометрийн байрыг ол. Үүнд: a) $r = 2, R = 3$ b) $r = 1, R = 2$

3. p тогтмол тоо үед $x^3 - 3x - p = 0$ куб тэгшитгэлийн бодит язгууруудын хамгийн их болон хамгийн бага утгуудын үржвэрийг $f(p)$ гэе. (Нэг бодит язгууртай бол түүний квадрат нь $f(p)$ болно.) Тэгвэл: a) $\forall p \in \mathbb{R}$-ийн хувьд $f(p)$-ийн минимум утгыг ол. b) $f(p)$ функцийн графикийг байгуул.

4. Гүдгэр 4 өнцөгтийн талууд дээр тухайн талыг диаметрээ болгосон дугуй байгуулъя. Эдгээр 4 дугуйнаас хоорондоо үл огтлолцох хос хамгийн ихдээ 1 олдохыг батал.

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

2-ын даваа, 1-р курс

Бодох хугацаа: 180 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр ....

Сургууль, анги ....

1. Гурван хэмжээст огторгуйн гүдгэр олон талст P_k-ын оройнууд $v_1, \ldots, v_k$ байг. α_i нь v_i-д уулзсан талстуудын v_i оройтой дотоод өнцгүүдийн нийлбэр бол $\sum_{i=1}^{k} a_i = (k-2)2\pi$ гэж батал.

2. $ax + by = 7$, $ax^2 + by^2 = 49$, $ax^3 + by^3 = 133$, $ax^4 + by^4 = 406$ бол

$$2017(x + y) - xy + 2017(a + b) = ?$$

3. $A^3 = A + I$ тэгшитгэлийг хангах $(detA > 0)$ $m \times m$ хэмжээтэй бодит матриц олдоно гэж батал.

4. $a > 0$, $[a, b]$ хэрчим дээр тасралтгүй, (a, b) интервал дээр дифференциалчлагддаг f функцийн хувьд

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(t) - t \cdot f'(t) \text{ байх } \quad t \in (a, b)$$

олдоно гэж батал.

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

1-ийн даваа, 2-р курс

Бодох хугацаа: 180 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр ....

Сургууль, анги ....

1. $y^2 = 2px$ параболын $A,\ B,\ C$ цэгүүд дээр шүргэсэн шүргэгчид KLM гурвалжныг үүсгэнэ. KLM гурвалжны талбай S бол ABC гурвалжны талбайг ол.

2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4|$ фунцийн $\{x \in \mathbb{R}^4 : |x_k| \le 1, k \in \overline{1,4}\}$ нэгж куб дээрх хамгийн их утгыг ол.

3. f нь $[a, b]$ хэрчим дээр интегралчлагддаг функц байг. Хэрэв $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x) > 0$, $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ бол

$$(b-a)^2 \le \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (b-a)^2 \frac{(m+M)^2}{4mM}$$

гэж батал.

4. (a) $\forall\ n$ натурал тооны хувьд

$$\sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \qquad \cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

байх p_n ба q_n олон гишүүнтүүд оршин байхыг батал.

(b) $n > 1$ үед

$p'_n(x) = nq_{n-1}(x)$,

$q'_n(x) = -np_{n-1}(x)$ адилтгалууд биелэхийг батал.

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

2-ын даваа, 2-р курс

Бодох хугацаа: 180 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр ....

Сургууль, анги ....

1. $a - b = 2017$ бол $a(xf(x))' = bf(x) + 2017f(x+1), x \in \mathbb{R}$ тэгшитгэлийн олон гишүүнт хэлбэртэй бүх шийдийг ол.

2. Бодит коэффициенттэй $\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$ олон гишүүнтүүдийн олонлогийг M-ээр тэмдэглээ. Тэгвэл $\forall f(x), g(x) \in M$-ийн хувьд $f(x) \cdot g(x) \in M$ байх уу?

3. T нь координатын эх дээр төвтэй α өнцгөөр эргүүлээд X тэнхлэгийн дагуу 1 нэгжээр зөөх буулгалт байг. Хэрэв $T^n(P) = P$ байх n натурал тоо олддог бол P цэгийг улаанаар будъя.

   a) Ямар α-ийн хувьд улаан цэг оршин байх вэ?

   b) Ямар α-ийн хувьд хавтгайн бүх цэг улаан байх вэ?

4. $[0, 1]$ хэрчим дээр тасралтгүй дифференциалчлагддаг ямар ч f функцийн хувьд

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)|dx$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

1-ийн даваа, 3,4-р курс

Бодох хугацаа: 180 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр ....

Сургууль, анги ....

1. $(1;+\infty)$ завсарт тасралтгүй

$$\int_{x}^{x^2} f(t)dt = 1 \quad (\forall x \in (1;+\infty))$$

байх $f(x)$ функц олдох уу?

2. 2-р эрэмбийн матрицан алгебр $M_2(\mathbb{R})$ дээр

$$\Big[[x,y]^2, z\Big] = 0$$

адилтгал биелэхийг харуул. Энд $[x,y] = xy - yx$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ байг.

   (a) A матрицын хувийн векторууд p, q, r-г ол.

   (b) $x_{n+1} = A \cdot x_n + u, n \geq 0$ дарааллын хувьд $x_n = \alpha_n p + \beta_n q + \gamma_n r$ байх $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ дарааллуудыг ол.

   (c) x_n-г a -аар илэрхийл.

4. Дугуй ширээ тойрон суусан n хүнээс хөрш 2 хүн агуулаагүй k хүн сонгох боломжын тоог ол.

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

2-ын даваа, 3,4-р курс

Бодох хугацаа: 180 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Овог нэр ....

Сургууль, анги ....

1. $g(x)$ нь эерэг, монотон өгөгдсөн функц бол $g(x)(f^{-1})'(f(x)) = 1$ тэгшитгэлийг бод.

2. Бодит тоон талбар $\mathbb{R}$ дээрх 2-р эрэмбийн матрицан алгебр $M_2(\mathbb{R})$-д
   $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma} sign(\sigma) \cdot X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} X_{\sigma(3)} X_{\sigma(4)} = 0,$ (σ нь $\{1, 2, 3, 4\}$ дээрх дурын орлуулга)
   адилтгал биелэхийг батал. Энд $sign(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв} \quad \sigma \quad \text{тэгш,} \\ -1, & \text{хэрэв} \quad \sigma \ \text{сондгой.} \end{cases}$

3. $f((x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 23$ гэе.

   (a) $f(x)$ нь $\mathbb{Q}$ дээр үл задрах гэж батал.

   (b) $f(x)$ нь дурын анхны p тооны хувьд p элементтэй талбар $\mathbb{F}_p$ дээр задрах гэж харуул.

4. $y'' + \sin y = 0$ тэгшитгэлийн ямар ч $y(x)$ шийдийн хувьд

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x}$$

   хязгаар оршин байх уу?

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

Багийн тэмцээн

Бодох хугацаа: 120 минут, бодлого бүр 7 оноотой

Баг, гишүүдийн нэр ....

Сургууль, курс ....

1. q элементтэй талбарыг $\mathbb{F}_q$ гээд

$$G(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| a, b \in \mathbb{F}_q, a \neq 0 \right\}$$

гэе.

   (i) $G(4)$ бүлэг 4 элементтэй олонлог дээрх алтернатив бүлэг A_4 (тэгш орлуулгын бүлэг)-тэй изоморф гэж харуул.

   (ii) $G(q)$ бүлэг A_4-тэй изоморф дэд бүлэг агуулдаг байх бүх q-ийг ол.

2. $x^6 - 6ix + c$ олон гишүүнт давхар язгууртай байх бүх c бодит тоог ол.

3. Дараах хязгаарыг бод.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{dx}{x + \ln(1+x)}$$

4. Мохоо өнцөгт ABC гурвалжин өгөв. Түүнийг багтаасан (агуулсан) хамгийн бага талбайтай тэгш өнцөгт гурвалжны талбайг ол.

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

2-ын даваа, 1-р курс

1. Гурван хэмжээст огторгуйн гүдгэр олон талст P_k-ын оройнууд $v_1, \ldots, v_k$ байг. α_i нь v_i-д уулзсан талстуудын v_i оройтой дотоод өнцгүүдийн нийлбэр бол $\sum_{i=1}^{k} a_i = (k-2)2\pi$ гэж батал.

   Бодолт: Тодорхойлолт ёсоор $\sum_{i=1}^{k} a_i$ нь P_k-ийн бүх талсуудын дотоод өнцгүүдийн нийлбэр юм. P_k нь гүдгэр учраас түүний бүх талс нь гүдгэр олон өнцөгт байна. Гүдгэр r өнцөгтийн дотоод өнцгүүдийн нийлбэр $(r-2)\pi$ байдгийг саная. P_k нь n_i ширхэг i-өнцөгт талстай $(3 \leq i \leq r)$ гэвэл $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=3}^{r} n_i(i-2)\pi$ болно. P_k-ийн нийт ирмэгийн тоог $|E|$, харин талсын тоог $|F|$ гэвэл $2|E| = \sum_{i=3}^{r} n_i \cdot i$ болно. Эндээс

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha i = \sum_{i=3}^{r} n_i(i-2)\pi = (2|E| - 2|F|)\pi$$

   гэж гарна. Эйлерийн томъёо ёсоор $k - |E| + |F| = 1$ гэдгийг санавал манай үр дүн гарна.

   Нэмэлт: Энэ бодлого Гаусс-Боннегийн теоремийн хамгийн хялбар тохиолдол бөгөөд P_k-ийг 2 ширхэг k-өнцөгт талстай бөхсөн олон талст гэвэл хавтгайн олон өнцөгтийн дотоод өнцгүүдийн нийлбэрийн томъёо мөрдөн гарна.

2. $ax+by = 7 \quad (1)\,, \quad ax^2+by^2 = 49 \quad (2), \quad ax^3+by^3 = 133 \quad (3), \quad ax^4+by^4 = 406 \quad (4)$ бол

$$2017(x+y) - xy + 2017(a+b) = ?$$

   Бодолт:

   (1) $\Rightarrow ax = 7 - by$ ба $by = 7 - ax$ болно.

   (2) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 =& x \cdot ax + y \cdot by \\ =& x(7-by) + y(7-ax) \\ =& 7(x+y) - (a+b)xy \\ =& 49 \quad (A) \end{aligned}$$

(2) ба (3) $\Rightarrow ax^2 = 49 - by^2, \quad by^2 = 49 - ax^2, \quad ax^3 = 133 - by^3, \quad by^3 = 133 - ax^3$ тул

$$\begin{aligned} ax^3 + by^3 =& x \cdot ax^2 + y \cdot by^2 \\ =& x(49 - by^2) + y(49 - ax^2) \\ =& 49(x+y) - (ax+by)xy \\ =& 49(x+y) - 7xy \\ =& 133 \Rightarrow \quad 7(x+y) - xy = 19 \quad (B) \end{aligned}$$

Үүнтэй төстэйгээр

$$\begin{aligned} ax^4 + by^4 =& x \cdot ax^3 + y \cdot by^3 \\ =& x(133 - by^3) + y(133 - ax^3) \\ =& 133(x+y) - (ax^2+by^2)xy \\ =& 133(x+y) - 49xy \\ =& 406 \Rightarrow \quad 19(x+y) - 7xy = 58 \quad (C) \end{aligned}$$

Эцэст нь (A), (B), (C) тэгшитгэлүүдээс $x+y = \frac{5}{2}$, $xy = -\frac{3}{2}$, $a+b = 21$ гэж гарна. Иймээс

$$2017(x+y) - xy + 2017(a+b) = 2017 \cdot \frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) + 2017 \cdot 21 = 47401$$

3. $A^3 = A + I$ тэгшитгэлийг хангах $(detA > 0)$ $m \times m$ хэмжээтэй бодит матриц олдоно гэж батал.

4. $a > 0$, $[a, b]$ хэрчим дээр тасралтгүй, (a, b) интервал дээр дифференциалчлагддаг f функцийн хувьд
$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(t) - t \cdot f'(t) \text{ байх } \quad t \in (a, b)$$
олдоно гэж батал.

2-ын даваа, 2-р курс

1. $a - b = 2017$ бол $a(xf(x))' = bf(x) + 2017f(x+1), x \in \mathbb{R}$ тэгшитгэлийн олон гишүүнт хэлбэртэй бүх шийдийг ол.

   Бодолт:

   $a(xf(x))' = af(x) + axf'(x) = bf(x) + 2017f(x+1)$

   $\Rightarrow axf'(x) = 2017(f(x+1) - f(x))$ болно. Энэ тэгшитгэлийн тэг зэргийн олон гишүүнт буюу $f(x) = const$ функцууд хангана. Одоо $n \leq 1$ зэргийн олон гишүүнтүүд шийд болдог гэвэл дээрх тэгшитгэлийн баруун тал нь буюу $f(x+1) - f(x)$ нь $n-1$ зэргийнх болно. Харин зүүн тал нь $xf'(x)$ нь n зэргийнх болж харшлалд хүрэх тул анхны тэгшитгэлийн олон гишүүнт хэлбэртэй бүх шийд $f(x) = c$, Энд $c = const$ байна.

2. Бодит коэффициенттэй $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin kx$ олон гишүүнтүүдийн олонлогийг M-ээр тэмдэглэе. Тэгвэл $\forall f(x), g(x) \in M$-ийн хувьд $f(x) \cdot g(x) \in M$ байх уу?

Бодолт: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx$ олон гишүүнт сондгой функц байна. Иймд $f(x) \cdot g(x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \sin kx\right)$ тэгш функц байна. Иймд уг олон гишүүнтүүдийн олон гишүүнт үржих үйлдэлийн хувьд битүү биш байна.

3. T нь координатын эх дээр төвтэй α өнцгөөр эргүүлээд X тэнхлэгийн дагуу 1 нэгжээр зөөх буулгалт байг. Хэрэв $T^n(P) = P$ байх n натурал тоо олддог бол P цэгийг улаанаар будъя.

   a) Ямар α-ийн хувьд улаан цэг оршин байх вэ?

   b) Ямар α-ийн хувьд хавтгайн бүх цэг улаан байх вэ?

4. $[0, 1]$ хэрчим дээр тасралтгүй дифференциалчлагддаг ямар ч f функцийн хувьд

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|dx$$

тэнцэтгэл биш биелнэ гэж батал.

Бодолт:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = x \cdot f(x) - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot f'(x)dx = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = (x-1) \cdot f(x) - \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1) \cdot f'(x)dx = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) - int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)f'(x)dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx = f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)f'(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x-1)f'(x)dx \Rightarrow$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \int\limits_0^1 |f(x)|dx + \max_{0\leq x\leq \frac{1}{2}} |x| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|dx + \max_{\frac{1}{2}\leq x\leq 1} |x-1| \cdot \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)|dx$$

$$= \int\limits_0^1 |f(x)|dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 |f'(x)|dx$$

2-ын даваа, 3,4-р курс

1. $g(x)$ нь эерэг, монотон өгөгдсөн функц бол $g(x)(f^{-1})'(f(x)) = 1$ тэгшитгэлийг бод.

Бодолт: Дээрх тэгшитгэлийг f' -ээр үржүүлж эмхэтгэвэл

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)}$$

болно. Эндээс

$$\left[f^{-1}(f(x))\right]' = \frac{f'(x)}{g(x)} \Rightarrow 1 = \frac{f'(x)}{g(x)}$$

буюу

$$f(x) = c + \int_0^x g(t)dt$$

болно.

2. Бодит тоон талбар $\mathbb{R}$ дээрх 2-р эрэмбийн матрицан алгебр $M_2(\mathbb{R})$-д

$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_\sigma sign(\sigma) \cdot X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} X_{\sigma(3)} X_{\sigma(4)} = 0, \quad$ (σ нь $\{1,2,3,4\}$ дээрх дурын орлуулга)

адилтгал биелэхийг батал. Энд $sign(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{хэрэв } \sigma \text{ тэгш,} \\ -1, & \text{хэрэв } \sigma \text{ сондгой.} \end{cases}$

Бодолт: $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_\sigma (-1)^{sign(\sigma)} X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} X_{\sigma(3)} X_{\sigma(4)}$ олон гишүүнт нь бүх X_i-ээр шугаман учраас

$$S_4(e_{i_1j_1}, e_{i_2j_2}, e_{i_3j_3}, e_{i_4j_4}) = 0$$

гэж батлахад хангалттай. (Энд $e_{i_sj_s} - M_{2(\mathbb{R})}$-ийн матрицан нэгжүүд $i_sj_s \in \{1,2,3,4\}$) Хэрвээ $e_{i_sj_s} = e_{i_lj_l}$ бол $S_4(e_{i_1j_1}, e_{i_2j_2}, e_{i_3j_3}, e_{i_4j_4}) = 0$ байна. Одоо $S_4(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}) = 0$ гэдгийг $e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{ij}, & \text{хэрэв } j = k \\ 0, & \text{хэрэв } j \neq k \text{ .} \end{cases}$ гэсэн тооцоог ашиглан үзүүлэхэд хангалттай.

3. $f((x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 23$ гэе.

   (a) $f(x)$ нь $\mathbb{Q}$ дээр үл задрах гэж батал.

   (b) $f(x)$ нь дурын анхны p тооны хувьд p элементтэй талбар $\mathbb{F}_p$ дээр задрах гэж харуул.

Бодолт.

Баталгаа. $g(X) = X^4 - 3X^2 + 25$ гэвэл

$$f(X) = X^4 + 4X^3 + 3X^2 - 2X + 23 = (X+1)^4 - 3(X+1)^2 + 25 = g(X+1)$$

болох ба f задрах $\iff$ g задрах байна. Иймд g-г судлахад болно.

(a) Бүтэн квадрат ялгавал

$$g(X) = \left(X^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{91}{4}$$

болох ба эндээс g-ийн комплекс язгуурууд

$$\sqrt{\frac{3+i\sqrt{91}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3+i\sqrt{91}}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3-i\sqrt{91}}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{3-i\sqrt{91}}{2}}$$

гэж гарна. Аль ч хоёрынх нь үржвэр, нийлбэр нэгэн зэрэг рационал тоо болохгүй тул g нь $\mathbb{Q}$ дээр үл задарна.

(b) $p = 2$ үед $g(X) = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)^2$ тул $\mathbb{F}_2$ дээр задарна.

p сондгой гэвэл $2 \in \mathbb{F}_p$ урвуутай.

i. $a^2 = 13$ байх $a \in \mathbb{F}_p$ олддог бол $g(X) = X^4 + (10 - a^2)X^2 + 25 = (X^2 + aX + 5)(X^2 - aX + 5)$ тул $g(X)$ задарна.

ii. $a^2 = -7$ байх $a \in \mathbb{F}_p$ олддог бол $g(X) = X^4 + (-10 + a^2)X^2 + 25 = (X^2 + aX - 5)(X^2 - aX - 5)$ тул $g(X)$ задарна.

iii. $a^2 = -91$ байх $a \in \mathbb{F}_p$ олддог бол $g(X) = \left(X^2 - \frac{3+a}{2}\right)\left(X^2 - \frac{3-a}{2}\right)$ тул $g(X)$ задарна.

Хоёр квадрат биш хаслагын үржвэр квадрат хаслага болдог тул дээрх a), b), c) нөхцөлүүдийн ядаж нэг нь биелнэ. Бодлого бодогдов.

$\square$

4. $y'' + \sin y = 0$ тэгшитгэлийн ямар ч $y(x)$ шийдийн хувьд

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x}$$

хязгаар оршин байх уу?

Бодолт:

$y' = z(y)$ орлуулга хийе. $y'' = z'(y) \cdot y' = z \cdot z'(y)$

$\Rightarrow z \cdot z'(y) = -\sin y \Leftrightarrow zdz = -\sin y dy$

$\Rightarrow \frac{z^2}{2} = -\cos y + c \Rightarrow$ эхний интеграл $\frac{(y')^2}{2} = \cos y + c$

$\Leftrightarrow (y')^2 = 2\cos y + 2c$ Хэрэв $c \leq 1$ бол $y(x)$ шийд зааглагдсан байна. Иймд

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = 0c > 1$$

гэе. $y' = \sqrt{2c + 2\cos y} \quad (\pm) \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{\sqrt{2c + \cos y}} \Rightarrow \int\limits_{y(0)}^{y} \dfrac{dy}{\sqrt{2c + 2\cos y}} = x(y) - x(y(0))$

$\Rightarrow y \to \infty$ үед $\int\limits_{y(0)}^{y} \dfrac{dy}{\sqrt{2c + 2\cos y}} \sim \dfrac{y - y(0)}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dy}{\sqrt{2c + 2\cos y}} = \dfrac{y - y(0)}{2\pi} A,$

$\Rightarrow x(y) \sim \dfrac{y - y(0)}{2\pi} A \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{2\pi}{A.}$

Багийн тэмцээн

1. q элементтэй талбарыг $\mathbb{F}_q$ гээд

$$G(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{F}_q, a \neq 0 \right\}$$

гэе.

(i) $G(4)$ бүлэг 4 элементтэй олонлог дээрх алтернатив бүлэг A_4 (тэгш орлуулгын бүлэг)-тэй изоморф гэж харуул.

(ii) $G(q)$ бүлэг A_4-тэй изоморф дэд бүлэг агуулдаг байх бүх q-ийг ол.

Баталгаа. $G(q)$ бүлгийг $\mathbb{F}_q$ дээрх 1-р эрэмбийн аффин бүлэг гэж нэрлэдэг болохыг тэмдэглэе. $|G(q)| = q(q-1)$ байна.

(a) $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(4)$ хувьд $\alpha_g \colon \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$ буулгалтыг $\alpha_g(x) = ax + b$ гэж тодорхойлъё. Дараах өгүүлбэрүүдийг шалгахад хэцүү биш.

   i. $g \in G(4)$ хувьд α_g нь $\mathbb{F}_4$ олонлогийн сэлгэмэл болно.

   ii. $g, h \in G(4)$ хувьд $\alpha_g \alpha_h = \alpha_{gh}$ байна.

   iii. $g, h \in G(4)$ хувьд $g \neq h$ бол $\alpha_g \neq \alpha_h$ байна.

   Эндээс $\alpha \colon G(4) \to S_4$ инъектив гомоморфизм өгнө. $\alpha(G(4)) \leq S_4$ нь S_4-ийн 2 индекстэй дэд бүлэг болох тул $\alpha(G(4)) = A_4$ байна. Иймд $G(4) \cong A_4$.

(b) Хариу: $q = 2^n$, $n \geq 2$.

   i. $q = 2$ үед $|G(2)| = 2$ тул $G(2)$ нь A_4-тэй изоморф дэд бүлэг агуулахгүй.

   ii. $q = 2^n$, $n \geq 2$, үед $\mathbb{F}_4 \subseteq \mathbb{F}_q$ гэдгээс $G(4) \subseteq G(q)$ болох тул $G(q)$ нь A_4-тэй изоморф дэд бүлэг агуулна.

   iii. q сондгой гээд A_4-тэй изоморф $G \leq G(q)$ дэд бүлэг оршин байдаг гэж үзье. $\mathbb{F}_q^\times = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ гэвэл

$$\beta \colon G(q) \to \mathbb{F}_q^\times, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$$

   буулгалт гомоморфизм болох ба цөм нь

$$\ker \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{F}_q$$

   байна. $\gamma = \beta_{|G} \colon G \to \mathbb{F}_q^\times$ гээд цөмийг нь $H = \ker \gamma = G \cap \ker \beta$ гэж тэмдэглэе. G абелийн биш ба $\mathbb{F}_q^\times$ абелийн тул γ инъектив байх боломжгүй. Иймээс $H \neq 1$ байна. Лагранжийн теоремоос $|H| \mid \gcd(|G|, |\ker \beta|) = \gcd(12, q)$ ба q сондгой тул $|H| = 3$ байна. Гэтэл A_4 нь 3 элементтэй нормаль дэд бүлэггүй. Иймд A_4-тэй изоморф $G \leq G(q)$ оршин байхгүй.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, hook] & G \arrow[r] \arrow[d, hook] & G/H \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{F}_q \arrow[r] & G(q) \arrow[r] & \mathbb{F}_q^\times \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

$\square$

2. $x^6 - 6ix + c$ олон гишүүнт давхар язгууртай байх бүх c бодит тоог ол.

3. Дараах хязгаарыг бод.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{dx}{x+\ln(1+x)}$$

Бодолт. $x \geq 0$ үед $(x - \ln(x+1))' = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1} \geq 0$ тул $x - \ln(x+1) = f(x)$ функц $x \in [0; \infty)$ завсарт өснө. Иймд $f(x) > f(0)$ байх ба эндээс $x \geq \ln(x+1)$ байна. Яг адилаар $1 - \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1)$ гэж баталж боно. Эндээс

$$x \geq 0 \quad \text{үед} \quad 1 - \frac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

болов. Иймээс тэнцэтгэл бишийнхээ 2 талд x-ийг нэмээд хувиргавал

$$\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x+\ln(x+1)} \leq \frac{x+1}{x(x+2)}$$

болно. Эндээс хоёр талыг интегралчилвал

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x}dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\ln(1+x)}dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{x+1}{x(x+2)}dx$$

Эндээс баруун, болон зүүн интегралуудаа бодвол

$$\frac{\ln 2}{2} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\ln(1+x)}dx \leq \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{4n+4}{2n+1}$$

болно. Одоо $n \to \infty$ хязгаар авбал

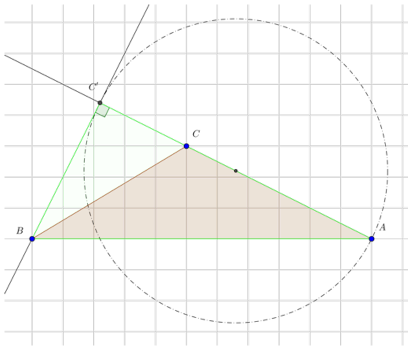
$$\frac{\ln 2}{2} \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{dx}{x+\ln(1+x)} \leq \frac{\ln 2}{2}$$

тул $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \dfrac{dx}{x+\ln(1+x)} = \dfrac{\ln 2}{2}$ болно.

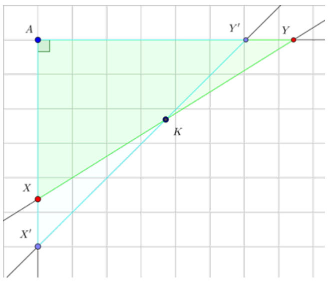
4. Мохоо өнцөгт ABC гурвалжин өгөв. Түүнийг багтаасан (агуулсан) хамгийн бага талбайтай тэгш өнцөгт гурвалжны талбайг ол.

Бодолт: Энэ packing бодлого хоёр шаттай бодогдоно; (1) оновчтой дүрс олох, (2) баталгаа хийх. Эднээс (1) амархан, харин (2) явдалтай. Ер нь packing бодлогууд ийм байдаг! Гурвалжны дотоод өнцгүүдийг α, β, γ гээд $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ буюу $|BC| \leq |AC| \leq |AB|$ гэе. Тэгвэл бодлогын хариу: $S_{min} = \dfrac{1}{2}|AB|^2 \sin 2\alpha$ ба хамгийн бага тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенуз нь AB талтай давхцсан, нэг катет нь AC талыг агуулсан, нөгөө катет нь B оройг дайрсан байна.

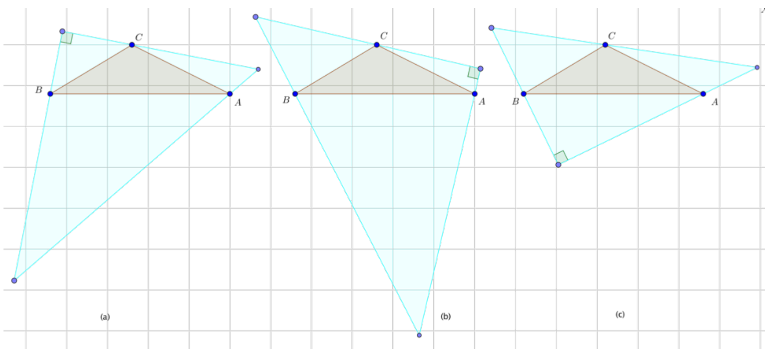
Одоо энэ хариуг шалгая. Хариун дээрх тэгш өнцөгт гурвалжны талбайг S^* гэвэл $\dfrac{S^*}{S_ABC} < 2$ болохыг эхлээд харъя. Бид $|BC| \leq |AC|$ байхаар авсан. BC нь $\triangle BC'C$-н гипотенуз гэдгээс $\dfrac{|C'C|}{|AC|} < 1$ гэж гарна. Өөрөөр хэлвэл $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{(\triangle C'BC)}} < 1$ буюу $\dfrac{S_{(\triangle BC'A)}}{S_{\triangle ABC}} < 2$.



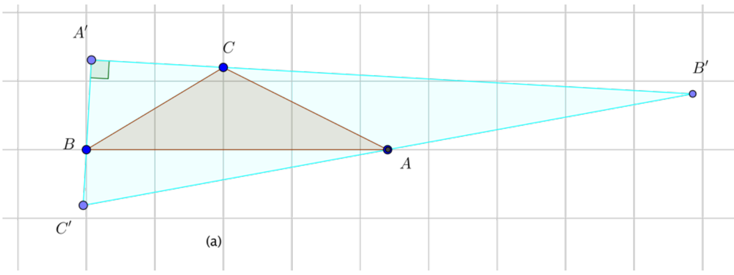
Лемма.1: A оройтой тэгш өнцөг, түүний дотор K цэг байв. Гипотенуз нь K цэгийг дайрсан, A оройтой гурвалжингуудаас хамгийн бага талбайтай нь AK хэрчмийг медиан болгоно. **Баталгаа:** $\triangle AXY, \triangle AX'Y'$ нь K-г дайрсан гипотенузтай ба $|XK| = |YK|$ байдаг гэе. $|X'K| > |Y'K|$ гэж үзэж болох бөгөөд энэ тохиолдолд $S_{(\triangle XKX')} - S_{(\triangle YKY')} = |XK| \cdot \sin \angle XKX' \cdot (|X'K| - |Y'K|) > 0$ байна. Улмаар $S_{\triangle X'AY'} - S_{\triangle XAY} = S_{\triangle XKX'} - S_{\triangle YKY'} > 0$ болж Лемма-1 батлагдав.



Бид "$\triangle ABC$-ийн оройнууд хамгийн бага тэгш өнцөгт гурвалжны талууд дээр оршино" гэж үзэж болно; хэрэв тийм биш бол тухайн тэгш өнцөгт гурвалжныг талбайн хувьд багасгах (агшаах) боломжтой. Тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенуз нь A, B, C оройнуудын алинийг ч дайрч болох тул бидэнд 3 боломж байна:



Одоо "хамгийн бага тэгш өнцөгт гурвалжны аль нэг тал нь заавал $\triangle ABC$-ын хоёр оройг дайрна (ө.х. $\triangle ABC$-ын нэг талыг агуулна)" гэж харуулъя. Өөрөөр хэлбэл дээрх (a)-(c) байрлалуудын аль нь ч хамгийн бага биш.



Эсрэгээс нь дээрх зурган дээрх (a) тохиолдол хамгийн бага тэгш өнцөгт гурвалжинг өгдөг гэе. Тэгш өнцөгт гурвалжныг $\triangle A'B'C'$ гэвэл Лемма-1 ёсоор энэ гурвалжин хамгийн бага байхын тулд A цэг түүний гипотенузыг хагаслан хуваана. Эндээс $|C'A| = |AB'| = |A'A|$ гэж мөрдөн гарна. C оройгоос AB ба $C'B'$ талуудад буусан өндрүүдийг харгалзан h_c, h'_c гэвэл $\triangle ABC$ нь $\triangle A'B'C'$-д агуулагдана гэдгээс $h_c < h'_c$ байна. $\triangle A'AC'$ адил хажуут ба AB нь энэ гувалжны A оройг суурьтай холбосон хэрчим гэдгээс $|AB| < |AC'| = |AB'|$. Иймд $S_\triangle ABC = \dfrac{1}{2}h_c \cdot |AB| < \dfrac{1}{2}h'_c \cdot |AB'| = S_\triangle CAB'$ болно. Үүнээс

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} > \frac{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AB'C}}{S_{\triangle ABC}} > 2$$

гэж гарах ба $S_{\triangle A'B'C'} > S^*$ болно. Зөрчилд хүрэв. Үүнтэй яг ижилээр (b) байрлал нь хамгийн бага тэгш өнцөгт гувалжин биш гэж харуулна.

Лемма.2: Тойргийн XY диагоналийг F цэгээр огтолдог ZT хөвч татав. Хэрэв $|XF| < |FY|$ бол $S_\triangle XFT < S_{\triangle YFZ}$ байна.

Баталгаа: $\triangle XFT \sim \triangle ZFY$ учраас $|FT| < |FY|$ гэж батлахад хангалттай (төсөөтэй гурвалжнуудын талбайн харьцааг сана!). $|XF| < |FY|$ учраас

$$\angle ZYT = \angle ZYF + \angle FYT < \frac{\pi}{2}$$

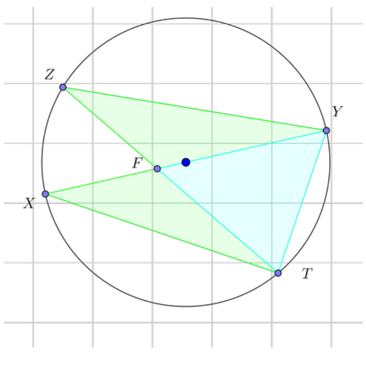
буюу

$$\frac{\pi}{2} - \angle ZYF > \angle FYT.$$

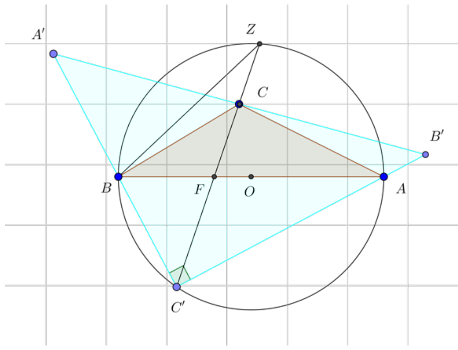
Одоо $\angle ZYF = \angle FTX = \dfrac{\pi}{2} - \angle YTF$ гэдгийг санавал

$$\angle YTF = \frac{\pi}{2} - \angle ZYF > \angle FYT$$

болох ба эндээс $|FT| < |FY|$ гэж мөрдөн гарна. Лемма-2 батлагдав.



Одоо (c) байрлал нь хамгийн бага гурвалжинг өгдөг гэе. Лемма-1 ёсоор C цэг тэгш өнцөгт гурвалжны гипотенузыг хагаслан хуваана. AB талын дунджийг O гээд $F = AB \cap CC'$ гэе. F нь BO хэрчим дээр, эсвэл OA хэрчим дээр байх боломжтой.



$\triangle BAC'$-ыг багтаасан тойргийг авч үзвэл, эхний тохиолдолд Лемма-2 ёсоор

$$S_{\triangle BCF} < S_{\triangle BZF} < S_{\triangle C'FA}$$

гэж гарна. Эндээс $S_{\triangle ABC} < S_{\triangle C'CB'}$ гэж мөрдөн гарна. $C'C$ нь медиан учраас $S_{\triangle C'CB'} = S_{\triangle C'CA'}$ ба үүнийг сүүлийн үр дүнтэй нэгтгэвэл $\dfrac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} > 2$ гэж гарах ба $S_{\triangle A'B'C'} > S^*$ болно. Зөрчилд хүрэв. F нь OA хэрчим дээр байвал үүнтэй яг ижилээр $S_{\triangle ABC} < S_{\triangle C'CA'}$ гэж харуулаад, улмаар $S_{\triangle A'B'C'} > S^*$ гэдгийг мөрдөн гаргаж зөрчилд хүрнэ. Иймд багтаасан тэгш өнцөгт гурвалжин хамгийн бага байхын тулд $\triangle ABC$-ийн ядаж нэг талыг дайрсан (агуулсан) талтай байна. Иим гурвалжунгуудаас хамгийн бага нь бидний хариунд байгаа гурвалжин болохыг хялбархан шалгаж болно.

Нэмэлт: Энэ бодлогыг хурц өнцөгт $\triangle ABC$ гурвалжны $|BC| \leq |AC| \leq |AB|$ хувьд бас ижил аргаар бодно. Тэр тохиолдолд хариу нь: $S_{min} = \dfrac{1}{2}|AC|^2 \tan\alpha$.